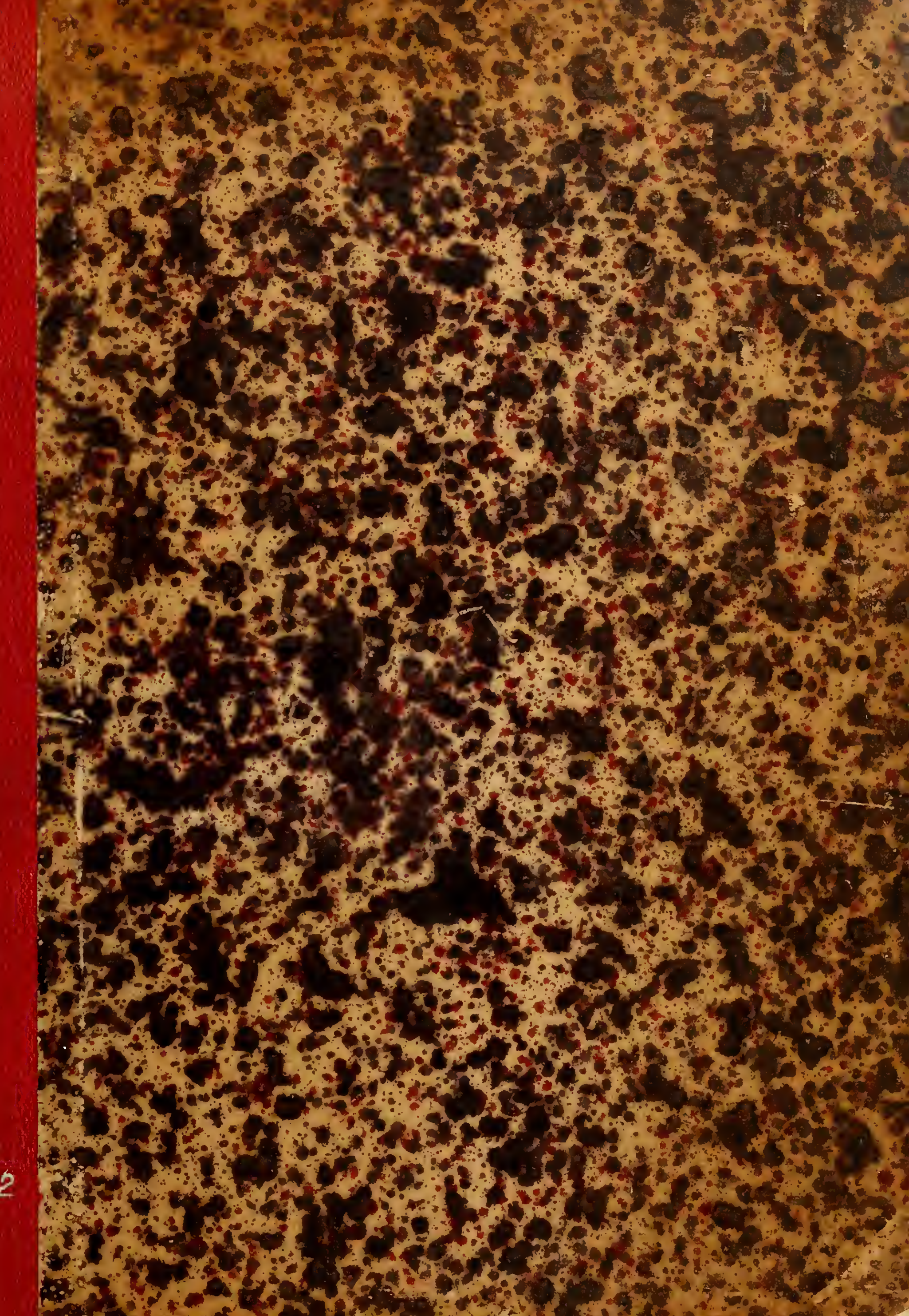
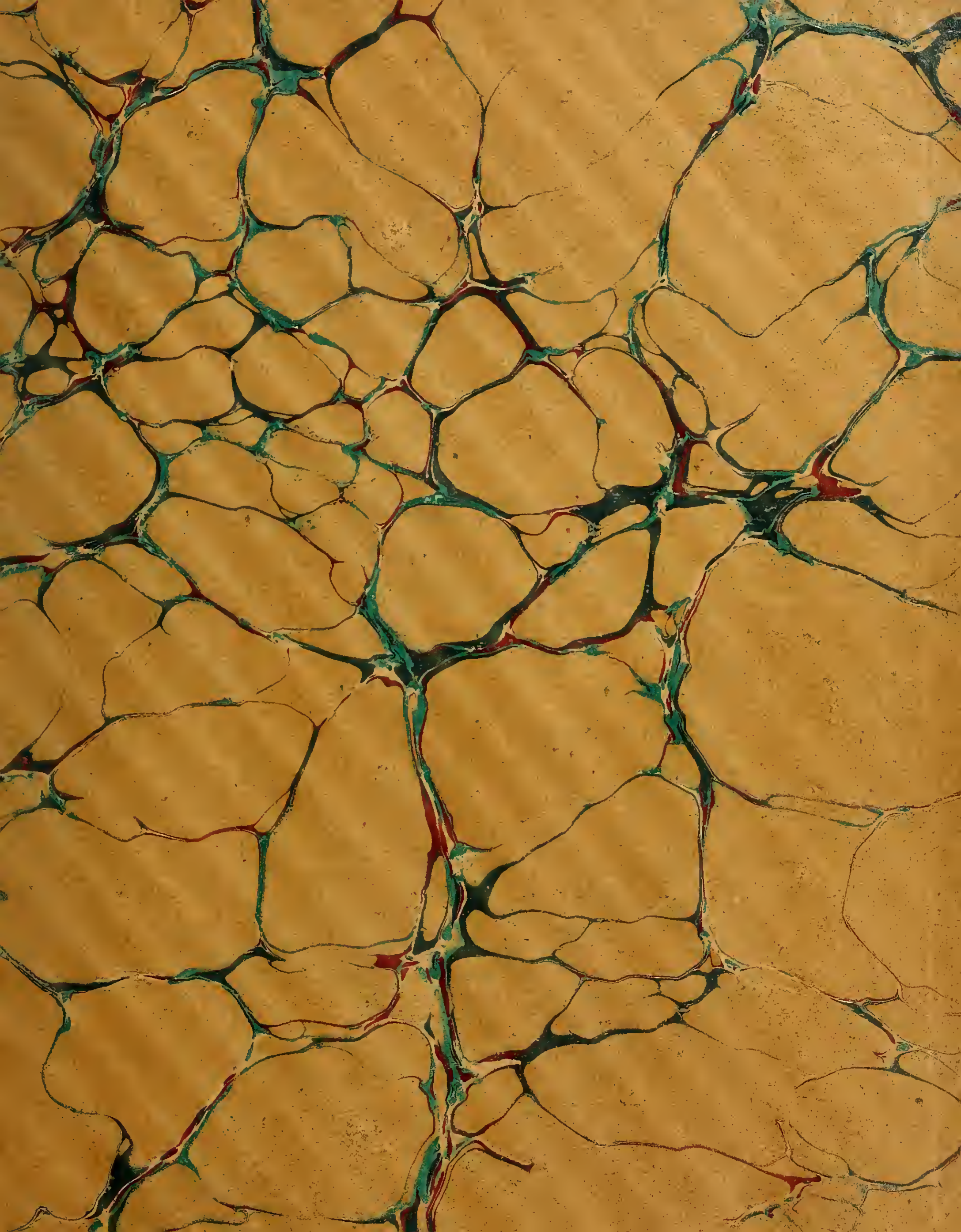






L. G. Butler
Prof. of Mathematics
Albany College
Albany, Ore.

May 31, 1928
Cost 70¢

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

LINÉAIRES ET HOMOGÈNES.

Extrait des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, tomes VIII et IX.

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

LINÉAIRES ET HOMOGÈNES,

PAR

L. SAUVAGE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES

Quai des Grands-Augustins, 55.

1895

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

LINÉAIRES ET HOMOGÈNES.

INTRODUCTION.

L'étude de l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0 \tag{1}$$

a précédé celle des systèmes de la forme

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n. \tag{A}$$

Mais, dans les lignes générales, les deux études sont parallèles, et même l'équation d'ordre n doit être rattachée à un cas particulier du système (A).

Nous entreprenons ici l'exposition des théories générales concernant le système (A), du moins de celles que l'on peut considérer aujourd'hui comme définitives. Nous avons mis en relief *la théorie des diviseurs élémentaires;* elle est, en quelque sorte, l'instrument qui nous sert dans presque toutes les questions pour tirer du calcul, d'une manière à la fois simple et complète, tout ce qu'il peut donner dans les théories qui nous occupent.

Voici l'ordre que nous avons suivi :

Chapitre I. — On démontre d'abord que, si les coefficients a du système

$$x \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{B}$$

sont holomorphes dans le domaine de l'origine, on peut intégrer ce système par

les séries. J'ai démontré la convergence de ces séries dans les *Annales de l'École Normale,* en 1886.

Chaque groupe de séries $y_1, \ldots, y_n$ qui satisfait au système (B), et plus particulièrement au système (A), est appelé *une solution du système.*

Toute la théorie de M. Fuchs (*J. de Crelle,* t. 66, et J. Tannery, *Thèse*) sur l'équation générale de la forme (1) est applicable aux systèmes (A) ou (B). Nous voyons d'abord la définition des éléments d'une solution au delà du cercle de convergence des séries, puis la distinction des systèmes de solutions en *fondamentaux* et non fondamentaux. Soient $y_{1i}, \ldots, y_{ni}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ n solutions, le déterminant

$$D = |y_{ji}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n)$$

est *différent de zéro ou nul identiquement, suivant que le système de solutions est fondamental ou non.* La démonstration que l'on donne de ce théorème s'applique aux solutions définies avec la signification la plus générale.

En suivant pas à pas la théorie de M. Fuchs, on démontre la proposition de Liouville

$$D = C e^{\int (\Sigma a_{ii})\, dx},$$

et, comme corollaire, on prouve l'existence des systèmes fondamentaux; on montre la transformation d'un système fondamental dans un autre; on donne l'expression de la *solution générale* du système (A) au moyen des éléments d'un système fondamental.

On voit ensuite comment la connaissance d'une solution permet de réduire le nombre des équations (A) d'une unité. Les conséquences intéressantes de ce calcul sont mises en lumière. Nous avons ajouté, ce qui nous paraît nouveau, la comparaison des deux méthodes de simplification de l'équation (1), lorsque l'on traite directement cette équation comme l'a fait M. Fuchs, ou lorsqu'on la considère comme procédant d'un cas particulier du système (A).

En résumé, le premier Chapitre contient les principes essentiels de la théorie des systèmes (A), et, comme cas particulier, ceux de la théorie de l'équation (1).

Chapitre II. — En 1858, M. Weierstrass publia un premier Mémoire sur les formes quadratiques. Dix ans après, le même illustre géomètre publia, en apparence, la suite de la théorie commencée, mais, en réalité, jeta les fondements d'une théorie nouvelle d'une portée plus générale que celle des formes quadratiques. Le Chapitre II est entièrement consacré à l'exposition des idées de M. Weierstrass, sous le titre de *Théorie des diviseurs élémentaires.*

Mais la théorie de ces diviseurs n'est pas établie sans difficulté dans le Mémoire de 1868. D'un autre côté, MM. Darboux et Jordan reprenaient en France l'étude

des formes quadratiques et bilinéaires (*Journal de Mathématiques pures*, 1874). Nous avons pris la méthode parfaite de M. Darboux, et nous l'avons appliquée aux formes bilinéaires dans deux Mémoires successifs ([1]).

Le Chapitre II renferme seulement les principes nécessaires et suffisants pour l'étude des équations (A).

Des tentatives d'application de la théorie des diviseurs élémentaires aux systèmes différentiels ont été faites par divers auteurs. Nous croyons qu'aucun n'a fait une application *aussi générale et aussi systématique* que celle que nous présentons dans les Chapitres suivants.

Soit

$$\begin{vmatrix} pA_{11}+qB_{11} & \dots & pA_{1n}+qB_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ pA_{n1}+qB_{n1} & \dots & pA_{nn}+qB_{nn} \end{vmatrix} = [P, Q]$$

un déterminant du degré n en p et q. Soit l_ϖ l'exposant d'un diviseur linéaire $ap+bq$ dans les mineurs d'ordre ϖ de $[P, Q]$, ces mineurs étant considérés comme des polynômes en p et q, *l'expression*

$$(ap+bq)^{l_\varpi - l_{\varpi+1}}$$

est un diviseur élémentaire du déterminant $[P, Q]$.

Le théorème général auquel nous parvenons est le suivant :

Pour qu'une même substitution double de la forme

$$y'_i = C_{i1}y_1 + \dots + C_{in}y_n,$$
$$x_i = C_{1i}x'_1 + \dots + C_{ni}x'_n,$$

ramène à la fois les formes

$$P = x_1y_1 + \dots + x_ny_n,$$
$$Q = \Sigma a_{ij}x_iy_j$$

aux deux formes

$$P' = x'_1y'_1 + \dots + x'_ny'_n,$$
$$Q' = \Sigma a'_{ij}x'_iy'_j,$$

il faut et il suffit que les déterminants des deux formes

$$Q - \omega P, \qquad Q' - \omega P'$$

aient mêmes diviseurs élémentaires en ω.

En outre, et cette remarque est des plus importantes, il existe une forme

---

([1]) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1891 et 1893.

canonique des expressions P' *et* Q' *pour lesquelles le déterminant* $Q' - \omega P'$ *a une forme des plus simples.* Nous utilisons cette forme dans nos théories sur les équations (A).

Chapitre III. — On trouve dans ce Chapitre l'extension aux systèmes (A) de la théorie des points singuliers de l'équation (1) donnée par M. Fuchs en 1866, et qui procède d'ailleurs, comme idée première, des théories de Puiseux sur les fonctions algébriques. Nous avons démontré, au moyen de la théorie des diviseurs élémentaires, l'existence d'un système fondamental de solutions particulières jouissant de propriétés spéciales. Nous avons aussi donné le procédé pratique de M. Fuchs pour rechercher ces solutions si importantes.

Le titre du Chapitre III est *Des points singuliers*. C'est, en effet, dans ce Chapitre que le caractère de ces points est complètement déterminé par le mode d'existence des solutions dans *leurs domaines,* et par le rôle que jouent ces points dans la reconstruction des équations différentielles (A).

Nous avons repris, sous la forme d'un système (A), la belle théorie de M. Tannery sur les équations (1) dont les intégrales sont les racines d'une même équation algébrique. Nous avons achevé *complètement* la question.

Chapitre IV. — Comme conséquence de la théorie précédente, la forme des éléments des solutions d'un système (A) peut être déterminée d'une manière générale pour le domaine d'un point ordinaire, ou singulier quelconque.

Mais on insiste d'une manière particulière sur les systèmes dits *réguliers* ou *canoniques* de la forme (B), dont on s'est occupé dès le premier Chapitre.

Les éléments de toutes leurs solutions sont composés linéairement avec des expressions de la forme

$$x^r(A_0 + A_1 \log x + \ldots + A_k \log^k x),$$

qui sont infinies d'ordre fini pour $x = 0$, *et qu'on appelle des expressions régulières, après M. Thomé* (*J. de Crelle,* t. 74 et suivants).

Le calcul complet *de l'intégration des systèmes canoniques* a été donné par M. Horn (*Mathematische Annalen,* XXXIX Bd). Nous exposons cette belle théorie qui repose encore sur la théorie des diviseurs élémentaires.

Le germe du principe employé par M. Horn est déjà dans les travaux de M. Frobenius (*J. de Crelle,* t. 74 et suivants). On le trouve presque complètement développé dans un remarquable travail de M. Grünfeld (*K. Ak. Wien,* 1888).

Ne manquons pas de faire observer que tout le Chapitre IV établit la différence essentielle entre le cas particulier du système (A) qui conduit à l'équation (1) et le cas général.

Chapitre V. — Nous espérons avoir résolu l'importante question suivante : *Quels sont tous les systèmes réguliers?* Nous avons montré que tous ces systèmes peuvent se ramener par des substitutions simples à des systèmes canoniques.

Chapitre VI. — Les théories exposées dans ce Chapitre et relatives aux systèmes à coefficients *simplement ou doublement périodiques* ont été d'abord développées par M. Floquet pour le cas d'une équation de la forme (1) (*Annales de l'École Normale,* 1883 et 1884). Nous étendons facilement les théorèmes de M. Floquet au système (A), *en nous servant toujours de la féconde théorie des diviseurs élémentaires.*

Nous avons ajouté à la théorie générale quelques belles pages de M. Picard (*J. de Crelle,* Bd. 90) sur un système à coefficients doublement périodiques.

Chapitre VII. — Nous avons mis ici à contribution M. Leo Kœnigsberger (*Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen,* Leipzig, G. Teubner, 1889). Ayant à étudier les systèmes homogènes, mais réductibles aux systèmes linéaires, nous avons surtout développé la réduction *des équations différentielles algébriques* à des équations du premier ordre.

Enfin, dans ce même Chapitre, nous montrons que la théorie générale de M. Fuchs, si belle qu'elle soit, n'empêche pas le développement, mais au contraire vient à l'aide de théories parallèles, plus utiles à divers points de vue particuliers. Ainsi, nous donnons la magnifique théorie de M. Darboux sur l'intégration des systèmes (A) par *les intégrales des systèmes* (*Comptes rendus,* 1880). Cette question nous a amené à dire quelques mots de la Théorie, si connue aujourd'hui, de M. Appell sur les fonctions invariantes et les *invariants* des systèmes (A).

Il ne nous a pas paru enfin inutile d'ajouter quelques notes élémentaires sur la théorie des déterminants.

Observations. — Les théories générales étudiées dans les divers Chapitres servent en quelque sorte d'introduction à la grande question des systèmes (A) à *solutions algébriques.* On sait déjà que le nombre des points singuliers est limité, que, pour chaque domaine, les éléments des solutions doivent être réguliers et sans logarithmes. On pourra se rendre compte facilement du degré d'avancement de cette question en relisant les remarquables Mémoires de M. Goursat sur la Théorie des équations différentielles linéaires.

CHAPITRE I.

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

1. Le système d'équations

$$
(A) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n
\end{aligned}
\right.
$$

est dit un *système d'équations différentielles linéaires et homogènes à une variable indépendante x et à n inconnues* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lorsque les coefficients $a_{11}, a_{1n}, \ldots, a_{nn}$ sont des fonctions analytiques de la variable x. Nous étudierons d'abord les systèmes de cette forme auxquels on peut ramener les systèmes de forme plus générale, comme on le verra par la suite (Chapitre VII).

Nous représenterons aussi un système de la forme (A) par la notation

$$
(A') \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),
$$

ou par la notation

$$
(A'') \qquad \frac{dy_i}{dx} = \sum_j a_{ij}y_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).
$$

2. Supposons que les coefficients a aient une définition analytique dans une région du plan à contour simple, que nous appellerons T, et qui peut aller à l'infini.

Nous supposerons que ces coefficients soient uniformes dans la région (ou que l'on ait ramené l'étude de ces coefficients à celle de fonctions uniformes). Nous admettrons, en outre, que ces coefficients soient continus en tous les points de la région T, sauf en certains points. Ces points particuliers, isolés les uns des autres et généralement en nombre fini, seront appelés les *points singuliers* des fonctions a.

La variable x ayant d'abord une valeur x_0 dite *initiale* et représentée par un point dans *le plan des x*, on suppose que cette variable décrive un chemin quelconque allant du point x_0 à un autre point quelconque de la région T. Dans ces conditions, il s'agit d'abord de déterminer si, au moyen des équations (A), on peut définir n fonctions analytiques $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ayant chacune une valeur bien déterminée pour chaque point du chemin décrit par la variable x. C'est le premier problème que nous aurons à traiter.

Pour répondre à cette question, nous allons montrer qu'on peut *généralement intégrer le système* (A) par les séries.

3. Pour éviter plus loin (Chapitre IV) des répétitions, considérons de suite le système

$$(1) \qquad (x-a)\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et supposons que les fonctions $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ soient *holomorphes* dans un certain domaine du point $x = a$. Pour simplifier l'écriture nous poserons $x = a + x'$, de sorte que les fonctions $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ seront holomorphes dans un certain domaine de l'origine $x' = 0$.

Nous écrirons simplement les équations précédentes sous la forme (B) de l'introduction, c'est-à-dire sous la forme

$$(2) \qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les fonctions a_{ij} seront développables en séries uniformément convergentes dans le domaine considéré et de la forme

$$(3) \qquad a_{ij} = a_{ij}^0 + x a_{ij}^1 + x^2 a_{ij}^2 + \ldots.$$

L'origine sera un point ordinaire ou un point singulier suivant que tous les coefficients constants a_{ij}^0 seront nuls ou non.

Nous allons montrer qu'on peut satisfaire au système (2) au moyen de n fonctions qu'on peut mettre sous la forme

$$(4) \qquad y_i = x^r(\varphi_i^0 + x\varphi_i^1 + \ldots + x^k\varphi_i^k + \ldots) = x^r\varphi_i,$$

les séries φ_i entre parenthèses étant uniformément convergentes dans un certain domaine de l'origine.

Nous introduirons les valeurs (4) des y dans les équations (2), en tenant compte des équations, (3) et nous égalerons dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de x. Nous remarquerons d'abord que l'équation

$$y = x^r\varphi$$

entraîne la suivante

$$x\frac{dy}{dx} = x^r\left(x\frac{d\varphi}{dx} + r\varphi\right).$$

Ensuite nous observerons que les équations (2) deviennent après division par x^r

$$(5) \qquad x\frac{d\varphi_i}{dx} = a_{i1}\varphi_1 + \ldots + (a_{ii} - r)\varphi_i + \ldots + a_{in}\varphi_n \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

L'identification fournira d'abord les équations

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} (a^0_{11}-r)\varphi^0_1 + a^0_{12}\varphi^0_2 + \ldots + a^0_{1n}\varphi^0_n = 0, \\ a^0_{21}\varphi^0_1 + (a^0_{22}-r)\varphi^0_2 + \ldots + a^0_{2n}\varphi^0_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ a^0_{n1}\varphi^0_1 + a^0_{n2}\varphi^0_2 + \ldots + (a^0_{nn}-r)\varphi^0_n = 0. \end{array}\right.$$

Celles-ci entraînent la condition

$$(7)\quad F(r) = \begin{vmatrix} a^0_{11}-r & a^0_{12} & \ldots & a^0_{1n} \\ a^0_{21} & a^0_{22}-r & \ldots & a^0_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a^0_{n1} & a^0_{n2} & \ldots & a^0_{nn}-r \end{vmatrix} = 0.$$

Nous voyons d'abord que le nombre r ne pourra être que l'une des racines de l'équation algébrique de degré n

$$F(r) = 0.$$

Si tous les coefficients a^0_{ij} sont nuls on prendra $r = 0$ et de plus dans les équations (6) les inconnues $\varphi^0_1, \varphi^0_2, \ldots, \varphi^0_n$ pourront prendre des valeurs arbitraires.

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les racines de l'équation $F(r) = 0$ rangées de manière qu'aucune des quantités $r_2 - r_1 - 1, \ldots, r_n - r_1 - 1$ ne soit nulle ou égale à un nombre entier positif. Cette condition sera remplie si les parties réelles ne vont pas en croissant quand on passe de la racine r_1 à l'une quelconque des autres. La quantité $r_1 + k$, quelle que soit la valeur du nombre k entier et positif, n'annulera jamais $F(r)$.

Nous prendrons $r = r_1$ et nous écrirons seulement r au lieu de r_1.

L'identification conduit maintenant à une infinité de systèmes successifs d'équations de la forme

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} k\varphi^k_i = a^0_{i1}\varphi^k_1 + a^0_{i2}\varphi^k_2 + \ldots + (a^0_{ii}-r)\varphi^k_i + \ldots + a^0_{in}\varphi^k_n \\ \qquad + a^1_{i1}\varphi^{k-1}_1 + a^1_{i2}\varphi^{k-1}_2 + \ldots + a^1_{ii}\varphi^{k-1}_i + \ldots + a^1_{in}\varphi^{k-1}_n \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + a^k_{i1}\varphi^0_1 + a^k_{i2}\varphi^0_2 + \ldots + a^k_{ii}\varphi^0_i + \ldots + a^k_{in}\varphi^0_n \end{array}\right\} (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Ce système d'équations est du premier degré par rapport aux coefficients $\varphi^k_1, \varphi^k_2, \ldots, \varphi^k_n$ et permet de les déterminer en fonction des coefficients φ dont l'indice supérieur est moindre. En effet, le déterminant des coefficients des inconnues est

$$\begin{vmatrix} a^0_{11}-r-k & a^0_{12} & \ldots & a^0_{1n} \\ a^0_{21} & a^0_{22}-r-k & \ldots & a^0_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a^0_{n1} & a^0_{n2} & \ldots & a^0_{nn}-r-k \end{vmatrix} = F(r+k).$$

Ce déterminant ne pouvant être annulé par aucune valeur du nombre entier et positif k, on pourra déterminer de proche en proche les coefficients des séries φ.

Dans le cas où tous les coefficients a_{ik}^0 sont nuls et où, par suite, r est nul, les quantités $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0$ resteront arbitraires, et tous les coefficients φ_i^k s'exprimeront finalement en fonctions linéaires et homogènes des n arbitraires $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0$. En conséquence les valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se présenteront sous la forme

$$y_i = \varphi_i^0 + x\varphi_i^1 + x^2\varphi_i^2 + \ldots,$$

et comme on pourra former n groupes de valeurs

$$\varphi_{1j}^0, \quad \varphi_{2j}^0, \quad \ldots \quad \varphi_{nj}^0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

dont le déterminant soit différent de zéro, on en conclut qu'on pourra former n groupes de valeurs correspondantes

$$y_{ij} = \varphi_{ij}^0 + x\varphi_{ij}^1 + x^2\varphi_{ij}^2 + \ldots \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

et entre les n^2 éléments y_{ij}, on ne pourra pas établir de relations simultanées et identiques de la forme

$$C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou de la forme

$$C_1 y_{1j} + C_2 y_{2j} + \ldots + C_n y_{nj} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

à coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$ constants.

4. Démontrons que les séries φ obtenues dans le numéro précédent sont uniformément convergentes dans un certain domaine de l'origine.

Appelons ρ le rayon d'un cercle ayant pour centre l'origine et dans lequel les séries a_{ij} soient toutes convergentes, même aux points situés sur la circonférence. On pourra prendre ce nombre ρ assez petit pour que le module $|a_{ij}^\mu|\rho^\mu$ d'un terme quelconque $a_{ij}^\mu x^\mu$ des séries a soit aussi petit que l'on voudra, pourvu qu'on laisse de côté les premiers termes a_{ij}^0 pour lesquels on a $\mu = 0$.

Posons

$$-G_i = a_{i1}^1 \varphi_1^{k-1} + \ldots + a_{in}^k \varphi_n^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que les équations (8) s'écriront

$$a_{i1}^0 \varphi_1^k + \ldots + (a_{ii}^0 - r - k)\varphi_i^k + \ldots + a_{in}^0 \varphi_n^k = G_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Tirons de ces équations la valeur de l'une quelconque des inconnues φ_s^k, nous aurons

$$F(r+k)\varphi_s^k = \Delta_1 G_1 + \ldots + \Delta_n G_n,$$

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ représentant, au signe près, des déterminants mineurs du premier ordre du déterminant $F(r+k)$.

On peut écrire cette équation

$$F(r+k)\varphi_s^k\rho^k = \Delta_1 G_1 \rho^k + \ldots + \Delta_n G_n \rho^k.$$

Or nous aurons

$$\begin{aligned} -G_i\rho^k = {} & a_{i1}^1 \rho.\varphi_1^{k-1}\rho^{k-1} + \ldots + a_{in}^1 \rho.\varphi_n^{k-1}\rho^{k-1} \\ & + a_{i1}^2 \rho^2.\varphi_1^{k-2}\rho^{k-2} + \ldots + a_{in}^2 \rho^2.\varphi_n^{k-2}\rho^{k-2} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{in}^k \rho^k.\varphi_1^0 + \ldots + a_{in}^k \rho^k.\varphi_n^0. \end{aligned}$$

Un terme quelconque de cette somme est de la forme

$$a_{ij}^\mu \rho^\mu.\varphi_i^{k-\mu}\rho^{k-\mu},$$

et μ est au moins égal à 1.

Appelons α_{ij}^μ et $\psi_j^{k-\mu}$ les modules de α_{ij}^μ et de $\varphi_j^{k-\mu}\rho^{k-\mu}$. Le module de $G_i\rho^k$ sera inférieur à la somme

$$\sum \alpha_{ij}^\mu \psi_j^{k-\mu} \qquad \text{où} \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \ldots, n, \\ j = 1, 2, 3, \ldots, n, \\ \mu = 1, 2, 3, \ldots, k. \end{array} \right.$$

Mais pour une valeur donnée de ρ et pour $\mu > 0$, les modules α_{ij}^μ ont une valeur maximum α. De plus, pour les valeurs de μ de 1 à k, l'une des quantités $\psi^{k-\mu}$ est plus grande que les autres. Désignons-la par ψ. Le nombre des termes de la somme étant nk, le module de la somme $G_i\rho^k$ sera inférieur à $nk\alpha\psi$.

Appelons maintenant $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ les modules des déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, le module de la somme

$$\Delta_1 G_1 \rho^k + \ldots + \Delta_n G_n \rho^k$$

sera inférieur à

$$kn\alpha\psi(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n).$$

Soit aussi δ le module de $F(r+k)$ on aura pour le module ψ_k de $\varphi_s^k\rho^k$

$$\psi_k < n\alpha\psi\left(\frac{k\,\delta_1}{\delta} + \frac{k\,\delta_2}{\delta} + \ldots + \frac{k\,\delta_n}{\delta}\right).$$

Mais $\frac{k\,\delta_i}{\delta}$ est le module de la fraction $\frac{k\,\Delta_i}{F(r+k)}$, et le degré en k du numérateur est au plus égal au degré du dénominateur. On peut donc prendre k assez grand pour que, à partir de cette valeur de k et pour toutes les valeurs de k plus grandes, le module de la fraction diffère de sa limite l_i d'une quantité ε_i aussi petite qu'on

voudra, et que ce module s'approche constamment de sa limite quand k augmente indéfiniment.

On aura alors pour cette valeur de k

$$\psi_k < n\alpha\psi(l_1 + l_2 + \ldots + l_n + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n).$$

Soit L la plus grande valeur de la parenthèse obtenue en prenant tous les ε positifs; on aura

$$\psi_k < n\alpha\psi L.$$

Cela posé, on peut prendre ρ assez petit pour que $n\alpha L$ soit un nombre plus petit que l'unité. En effet, on peut prendre ρ assez petit pour que α soit rendu aussi petit que l'on voudra. On aura donc, pour cette valeur de ρ, et pour toute valeur plus petite,

$$\psi_k < \frac{\psi}{p},$$

p étant un nombre plus grand que l'unité.

Si ensuite on remplace k par $k+1$, $k+2$, ..., on ne pourra pas augmenter la valeur de L et, par suite, celle de $n\alpha L$ ou de $\frac{1}{p}\cdot$ On aura donc

$$\psi_{k+k'} < \frac{\psi}{p} \qquad (k' = 1, 2, \ldots; \infty).$$

Il résulte de là que les modules des termes des séries φ seront, à partir d'un certain rang, moindres qu'un nombre déterminé pour toute valeur de x dont le module sera au plus égal à ρ. Les séries φ seront donc uniformément convergentes à l'intérieur du cercle de rayon ρ ayant son centre à l'origine.

5. Nous ne retiendrons pour le moment que la conclusion suivante du théorème que nous venons de démontrer.

Si les coefficients a_{ij} du système d'équations différentielles linéaires et homogènes

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = \sum_j a_{ij} y_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

sont des fonctions holomorphes dans un domaine du point $x = a$ (c'est-à-dire dans un cercle d'un rayon suffisamment petit ayant son centre au point $x = a$), la variation continue du point $x = a$ à un point quelconque x situé dans ce domaine à une distance suffisamment petite δ du point $x = a$ détermine n fonctions y_1, y_2, ..., y_n holomorphes dans ce domaine δ, et pouvant prendre au point $x = a$ des valeurs φ_1^0, φ_2^0, ..., φ_n^0 complètement arbitraires.

Ces n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ forment ce que nous appellerons une *solution* du système (A).

6. La définition d'une solution peut être étendue au delà du domaine considéré.

En effet, dans le domaine δ du point $x = a$, faisons varier x depuis $x = a$ jusqu'à un point $x = b$ situé dans ce domaine. Les n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ayant d'abord les valeurs $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0$ arriveront au point b à des valeurs généralement différentes $(\varphi_1^0)', \ldots, (\varphi_n^0)'$. Déterminons un domaine du point $x = b$, au moyen d'un cercle d'un certain rayon ayant son centre en ce point, et de telle manière que les théorèmes précédents soient applicables de nouveau; on fera passer x du point $x = b$ au point $x = c$ situé dans le second domaine, mais non nécessairement dans le premier. En ce point c on répétera ce que l'on a fait pour le point b, etc., et, par suite :

Si les fonctions a_{ij} sont uniformes dans une partie du plan limitée par un contour simple, ou même dans tout le plan, et continues en tous les points de cette région sauf en des points isolés, la variation continue de x, d'un point $x = a$ à un point quelconque de la même région, sur un chemin quelconque situé dans la région et ne passant par aucun point singulier, déterminera n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ uniformes dans toute région du plan qui ne contient aucun point singulier et continues en tous les points du chemin. Ces fonctions satisferont au système d'équations (A) *et pourront prendre au point $x = a$ des valeurs $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$ arbitrairement choisies.*

C'est à l'ensemble de n fonctions ainsi définies pour la région T que nous donnerons dorénavant le nom de *solution*.

7. On appelle *système de solutions* l'ensemble de n solutions définies pour les mêmes variations de x. Les solutions d'un système ne diffèrent donc que par les valeurs initiales de leurs éléments.

Soit D le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{n1} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1n} & y_{2n} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad |y_{ij}|$$

des éléments d'un système de solutions représentées par les n groupes de fonctions

$$y_{1j}, \quad \ldots, \quad y_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous dirons que le système est *fondamental* si le déterminant D n'est pas identiquement nul.

Les systèmes fondamentaux étant d'une importance capitale dans nos théories, nous démontrerons d'abord qu'il existe des systèmes fondamentaux de solutions. Nous savons déjà qu'il en existe, quand on se borne à un domaine suffisamment petit du point $x = a$ dans lequel les coefficients a_{ij} sont holomorphes (§ 3).

8. Démontrons d'abord le théorème suivant :

Le déterminant D *d'un système de solutions quelconques satisfait à la relation*

$$d \log \mathrm{D} = (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\, dx.$$

On a

$$d \log \mathrm{D} = \frac{1}{\mathrm{D}} \frac{d\mathrm{D}}{dx} dx.$$

Or

$$\frac{d\mathrm{D}}{dx} = \sum_{i=1}^{i=n} \begin{vmatrix} y_{11} & \ldots & \dfrac{dy_{i1}}{dx} & \ldots & y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & \ldots & \dfrac{dy_{in}}{dx} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Mais on a en général

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n.$$

On a donc

$$\begin{vmatrix} y_{11} & \ldots & \dfrac{dy_{i1}}{dx} & \ldots & y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & \ldots & \dfrac{dy_{in}}{dx} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11} & \ldots & a_{i1} y_{11} + \ldots + a_{in} y_{n1} & \ldots & y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & \ldots & a_{i1} y_{1n} + \ldots + a_{in} y_{nn} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix} = a_{ii}\mathrm{D}.$$

On a, par suite,

$$\frac{d\mathrm{D}}{dx} = (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\mathrm{D},$$

d'où

$$\frac{1}{\mathrm{D}} \frac{d\mathrm{D}}{dx} = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii};$$

c'est-à-dire enfin

$$d \log \mathrm{D} = \left(\sum_i a_{ii} \right) dx.$$

9. Si l'on intègre l'équation précédente, on pourra mettre le déterminant D sous la forme

$$\mathrm{D} = \mathrm{C}\, e^{\int \left(\sum_i a_{ii} \right) dx},$$

C étant une constante.

De là des conséquences remarquables. Si l'on se donne des valeurs initiales des n^2 fonctions y, telles que le déterminant D ne soit pas nul, la constante C ne sera pas nulle, et le déterminant D restera différent de zéro tant que la variable n'atteindra pas un point singulier du plan des x; or, nous avons écarté les points singuliers dans la définition des fonctions y. Donc, il *existe une infinité de systèmes fondamentaux de solutions.*

10. *Toute solution du système d'équations* (A) *peut s'obtenir par des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants des éléments d'un système fondamental de solutions.*

En effet, soit un système quelconque de solutions

$$y_{1j},\quad y_{2j},\quad \ldots,\quad y_{nj} \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

Posons

$$Y_i = C_1 y_{i1} + C_2 y_{i2} + \ldots + C_n y_{in} \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ étant des constantes arbitraires; il est facile de vérifier que les fonctions Y constituent une solution du système (A).

Toute solution du système (A) peut, réciproquement, se mettre sous la forme précédente, pourvu que le système de solutions d'où l'on part soit fondamental.

En effet, soit

$$y_{1,n+1},\quad y_{2,n+1},\quad \ldots,\quad y_{n,n+1}$$

une solution quelconque du système d'équations (A). Cherchons à déterminer des fonctions $C_1, C_2, \ldots, C_n, \lambda$, telles que l'on ait

$$C_1 y_{i1} + C_2 y_{i2} + \ldots + \lambda y_{i,n+1} = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

On prendra λ arbitrairement et l'on aura à résoudre un système à n inconnues $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Ce système est du premier degré; le déterminant des coefficients des inconnues est différent de zéro si le système de solutions y_{ij} est fondamental.

Les inconnues $C_1, C_2, \ldots, C_n$ seront donc des fonctions déterminées de λ.

Je dis que les rapports $\frac{C_i}{\lambda}$ se réduisent tous à des constantes. En effet, en dérivant les équations précédentes, on a

$$y_{i1}\frac{dC_1}{dx} + \ldots + y_{in}\frac{dC_n}{dx} + y_{i,n+1}\frac{d\lambda}{dx} + C_1\frac{dy_{i1}}{dx} + \ldots + C_n\frac{dy_{in}}{dx} + \lambda\frac{dy_{i,n+1}}{dx} = 0.$$

Éliminons $\frac{dy_{ij}}{dx}$ au moyen des équations du système proposé.

Nous aurons

$$\begin{aligned}
&C_1 \frac{dy_{i1}}{dx} + \ldots + C_n \frac{dy_{in}}{dx} + \lambda \frac{dy_{i,n+1}}{dx} \\
&\quad = C_1(a_{i1}y_{11} + \ldots + a_{in}y_{n1}) + C_2(a_{i1}y_{12} + \ldots + a_{in}y_{n2}) \\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + C_n(a_{i1}y_{1n} + \ldots + a_{in}y_{nn}) + \lambda(a_{i1}y_{1,n+1} + \ldots + a_{in}y_{n,n+1}) \\
&\quad = a_{i1}(C_1 y_{11} + \ldots + C_n y_{1n} + \lambda y_{1,n+1}) + \ldots \\
&\qquad + a_{in}(C_1 y_{n1} + \ldots + C_n y_{nn} + \lambda y_{n,n+1}) = 0.
\end{aligned}$$

Nous aurons donc en même temps les deux systèmes d'équations

$$C_1 y_{i1} + \ldots + \lambda\ y_{i,n+1} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{dC_1}{dx} y_{i1} + \ldots + \frac{d\lambda}{dx} y_{i,n+1} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ces deux équations déterminent les mêmes valeurs proportionnelles des inconnues, en prenant pour inconnues d'une part $C_1, C_2, \ldots, C_n, \lambda$ et, d'autre part, $dC_1, dC_2, \ldots, dC_n$ et $d\lambda$; il faut donc que l'on ait

$$\frac{dC_1}{C_1} = \frac{dC_2}{C_2} = \ldots = \frac{dC_n}{C_n} = \frac{d\lambda}{\lambda},$$

ou encore

$$d\left(\frac{C_i}{\lambda}\right) = 0,$$

ou enfin

$$\frac{C_i}{\lambda} = \text{const.}$$

Si donc on prend λ égal à -1, on aura les relations

$$(9) \qquad y_{i,n+1} = C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

linéaires, homogènes et à coefficients constants qu'il s'agissait d'obtenir.

11. La démonstration du théorème précédent entraîne les corollaires suivants :

α. *Si un système de solutions n'est pas fondamental, il existe entre ses éléments des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme*

$$C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

β. *Entre les éléments de* $(n+1)$ *solutions du système* (A) *il existe toujours*

un système de relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme

$$C_1 y_{i1} + \ldots + C_{n+1} y_{in+1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

12. *Si l'on substitue aux éléments d'un système fondamental de solutions d'autres éléments déterminés par les relations linéaires à coefficients constants*

$$Y_{ij} = C_{j1} y_{i1} + \ldots + C_{jn} y_{in} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient un nouveau système fondamental à condition que le déterminant des constantes de la substitution soit différent de zéro.

En effet, soient P le déterminant des fonctions Y, Q celui des fonctions y, R celui des constantes, on a identiquement

$$P = QR.$$

Or Q et R sont, par hypothèse, différents de zéro et, par suite, P est différent de zéro, et les fonctions Y forment un système fondamental.

13. Substituons à *des éléments* d'un système fondamental d'autres éléments déterminés par les relations à coefficients constants

$$Y_{hk} = C_{k1} y_{h1} + \ldots + C_{kg} y_{hg}$$

pour toutes les valeurs de h de 1 à n et pour toutes les valeurs de k de 1 à g.

Nous aurons le Tableau

$$\begin{matrix} Y_{11} & \ldots & Y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_{1g} & \ldots & Y_{ng} \\ y_{1,g+1} & \ldots & y_{n,g+1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y_{1n} & \ldots & y_{nn} \end{matrix}$$

Les éléments de ce Tableau forment encore un système fondamental de solutions si le déterminant de constantes $|c_{gg}|$ de la substitution est différent de zéro. En effet, le déterminant des constantes peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1g} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & \ldots & c_{2g} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . & . & \ldots & . \\ c_{g1} & \ldots & c_{gg} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{g+1,1} & \ldots & c_{g+1,g} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & . & . & \ldots & . \\ c_{n1} & \ldots & c_{ng} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

et la question est ramenée à la précédente.

14. *Si l'on connaît une solution du système d'équations* (A), *on peut ramener l'intégration du système à celle d'un autre système de même forme ayant une inconnue de moins.*

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les éléments de la solution connue. Il peut en exister qui soient nuls. Admettons que les éléments $u_{s+1}, u_{s+2}, \ldots, u_n$ soient identiquement nuls, sans qu'il en soit de même pour les éléments $u_1, u_2, \ldots, u_s$.

Substituons aux fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_s$ d'autres fonctions $q_1, q_2, \ldots, q_s$ déterminées par les relations

$$(10) \qquad y_h = u_h q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, s).$$

Les s premières équations du système (A) deviendront

$$u_h \frac{dq_h}{dx} + q_h \frac{du_h}{dx} = a_{h1} u_1 q_1 + \ldots + a_{hs} u_s q_s + a_{h,s+1} y_{s+1} + \ldots + a_{hn} y_n,$$

ou encore

$$(11) \qquad \begin{aligned} \frac{dq_h}{dx} = a_{h1} \frac{u_1}{u_h} q_1 + \ldots + \left(a_{hh} - \frac{1}{u_h}\frac{du_h}{dx}\right) q_h + \ldots + a_{h,s} \frac{u_s}{u_h} q_s \\ + a_{h,s+1} \frac{1}{u_h} y_{s+1} + \ldots + a_{hn} \frac{1}{u_h} y_n \qquad (h = 1, 2, \ldots, s). \end{aligned}$$

Remplaçons y_{s+k} par q_{s+k}, nous aurons un système en $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de même forme que le système (A) et que nous écrirons

$$(12) \qquad \frac{dq_i}{dx} = \alpha_{i1} q_1 + \ldots + \alpha_{in} q_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cela posé, remarquons que le système (12) admet la solution

$$\begin{aligned} q_h &= 1 \qquad (h = 1, 2, \ldots, s), \\ q_{s+k} &= 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n - s). \end{aligned}$$

Nous devrons donc avoir, entre les coefficients α, les relations

$$(13) \qquad \alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \ldots + \alpha_{is} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En tenant compte de ces conditions, nous pouvons écrire les équations (12) sous la forme

$$(14) \qquad \frac{dq_i}{dx} = \alpha_{i2}(q_2 - q_1) + \ldots + \alpha_{is}(q_s - q_1) + \alpha_{is+1} q_{s+1} + \ldots + \alpha_{in} q_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Posons alors

$$(15) \qquad z_h = q_h - q_1 \qquad (h = 2, 3, \ldots, s),$$

$$(16) \qquad z_{s+k} = q_{s+k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n - s),$$

et retranchons la première équation des $s-1$ suivantes. En conservant les $n-s$ dernières équations (14), nous obtiendrons un système de la forme

$$(17) \qquad \frac{dz_i}{dx} = A_{i2} z_2 + \ldots + A_{in} z_n \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

auquel il faudra joindre l'équation

$$(18) \qquad \frac{dq_1}{dx} = \alpha_{12} z_2 + \ldots + \alpha_{1n} z_n.$$

On a en outre les relations

$$(19) \qquad A_{hh} = \alpha_{hh} - \alpha_{1h} = a_{hh} - \frac{1}{u_h} \frac{du_h}{dx} - \frac{u_h}{u_1} a_{1h} \qquad (h = 2, 3, \ldots, s),$$

$$(20) \qquad A_{s+k,s+k} = \alpha_{s+k,s+k} = a_{s+k,s+k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-s),$$

$$(21) \qquad A_{h\mu} = \alpha_{h\mu} - \alpha_{1\mu} = \frac{u_\mu}{u_h} a_{h\mu} - \frac{u_\mu}{u_1} a_{1\mu} \qquad (\mu \neq h = 2, 3, \ldots, s),$$

$$(22) \qquad A_{h\nu} = \alpha_{h\nu} - \alpha_{1\nu} = \frac{1}{u_h} a_{h\nu} - \frac{1}{u_1} a_{1\nu} \qquad (\nu = s+1, \ldots, n),$$

$$(23) \qquad A_{s+k,\mu} = \alpha_{s+k,\mu} = a_{s+k,\mu} \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, s),$$

$$(24) \qquad A_{s+k,\nu} = \alpha_{s+k,\nu} = a_{s+k,\nu} \qquad (\nu \neq s+k = s+1, \ldots, n).$$

Supposons que nous ayons obtenu une solution $\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n$ du système (17). Nous pourrons tirer q_1 de l'équation (18) en effectuant une quadrature. Soit Q une intégrale de l'équation (18). Nous aurons

$$(25) \qquad \begin{cases} q_h = \zeta_h + Q, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{s+k} = \zeta_{s+k}, \end{cases}$$

et nous en déduirons la solution

$$(26) \qquad \begin{cases} y_1 = u_1 Q, \\ y_h = u_h(\zeta_h + Q), \\ y_{s+k} = \zeta_{s+k} \end{cases}$$

du système (A).

Nous sommes donc ramenés à la résolution du système (17) de même forme que (A), mais où le nombre des fonctions inconnues est diminué d'une unité.

15. *Étant donné un système fondamental de solutions du système* (17), *le système de solutions correspondant des équations* (A) *est aussi fondamental.*

En effet, soit Δ le déterminant des solutions

$$\xi_{2j},\quad \xi_{3j},\quad \ldots,\quad \xi_{nj} \qquad (j=2,\ldots,n)$$

du système d'équations (17). Supposons Δ différent de zéro et, par suite, le système des solutions considérées fondamental.

L'équation (18) donne, pour chaque solution $\xi_{2j}, \ldots, \xi_{nj}$ des équations (17), une fonction Q_j, et l'on peut former un système de solutions des équations (A). Les éléments de ce système forment le Tableau

$$\begin{array}{lllllll}
u_1, & u_2, & \ldots, & u_s, & 0, & \ldots, & 0, \\
u_1 Q_1, & u_2(\xi_{22}+Q_1), & \ldots, & u_s(\xi_{s2}+Q_1), & \xi_{s+1,2}, & \ldots, & \xi_{n,2}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
u_1 Q_{n-1}, & u_2(\xi_{2n}+Q_{n-1}), & \ldots, & u_s(\xi_{sn}+Q_{n-1}), & \xi_{s+1,n} & \ldots, & \xi_{nn}.
\end{array}$$

Je dis que ce système est fondamental. En effet, s'il ne l'était pas, on pourrait établir entre ses éléments des relations à coefficients constants de la forme

$$C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in} = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n);$$

on aurait d'abord

$$C_1 u_1 + C_2 u_1 Q_1 + \ldots + C_n u_1 Q_{n-1} = 0,$$

ou, puisque u_1 n'est pas nul,

$$C_1 + C_2 Q_1 + \ldots + C_n Q_{n-1} = 0.$$

On aurait ensuite

$$C_1 u_h + C_2 u_h(\xi_{h2}+Q_1) + \ldots + C_n u_h(\xi_{hn}+Q_{n-1}) = 0,$$

ou, en tenant compte de la relation précédente, et en divisant par u_h qui n'est pas nul, on aurait

$$C_2 \xi_{h2} + \ldots + C_n \xi_{hn} = 0 \qquad (h=2,3,\ldots,s).$$

On aurait enfin

$$C_2 \xi_{s+k,2} + \ldots + C_n \xi_{s+k,n} = 0 \qquad (k=1,2,\ldots,n-s).$$

Ces deux derniers groupes de relations ne peuvent exister que si le système de solutions des équations (17) n'est pas fondamental, ce qui est contraire à l'hypothèse.

16. Nous avons maintenant l'indication d'une marche à suivre pour former un système fondamental de solutions des équations (A).

Soit une solution $u_1, u_2, \ldots, u_n$ du système (A). Formons un premier système auxiliaire d'équations ne renfermant que $n-1$ inconnues.

Soit une solution $v_2, v_3, \ldots, v_n$ de ce système. Au moyen de cette solution, passons à un deuxième système auxiliaire d'équations ne renfermant que $n-2$ inconnues; au moyen d'une solution de ce nouveau système, passons de même à un système ne renfermant que $n-3$ inconnues et continuons ainsi jusqu'à ce que nous arrivions à un dernier système réduit à une seule équation renfermant une seule inconnue. Soit

$$\frac{dw}{dx} = w.\mathrm{F}$$

cette équation. Elle donnera, par une quadrature,

$$w = \mathrm{C}e^{\int \mathrm{F}dx},$$

où C est une constante arbitraire.

Cette valeur de w, n'étant pas identiquement nulle, forme à elle seule un système fondamental du dernier système auxiliaire. Elle fournira, après une intégration, une nouvelle solution de l'avant-dernier système auxiliaire. On aura alors deux solutions de ce système, et elles forment un système fondamental. Ce système fondamental permettra ensuite de former, après deux quadratures, deux solutions nouvelles du système auxiliaire précédent. Avec la solution déjà connue on aura trois solutions de ce système d'équations et ces solutions formeront un système fondamental. En remontant ainsi de proche en proche on obtiendra finalement un système fondamental de solutions des équations (A).

Le nombre total des quadratures à effectuer dans la suite du calcul est

$$1+2+\ldots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

17. Il existe une relation simple entre les expressions des déterminants des systèmes fondamentaux dans les systèmes d'équations (A) et (17). Soit D un déterminant relatif au système (A) et soit Δ un déterminant relatif au système (17). En négligeant les facteurs constants, qui ne sont pas nuls, puisque D et Δ doivent être différents de zéro, on a

$$\mathrm{D} = e^{\int \left(\sum_i a_{ii}\right) dx},$$

$$\Delta = e^{\int \left(\sum_i \mathrm{A}_{ii}\right) dx}.$$

Or on a, d'après les équations (19) et (20),

$$\mathrm{A}_{hh} = a_{hh} - \frac{1}{u_h}\frac{du_h}{dx} - a_{1h}\frac{u_h}{u_1} \qquad (h = 2, 3, \ldots, s),$$

$$\mathrm{A}_{s+k,s+k} = a_{s+k,s+k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-s).$$

On en conclut

$$A_{22}+A_{33}+\ldots+A_{nn}=a_{22}+\ldots+a_{nn}$$
$$-\left(a_{12}\frac{u_2}{u_1}+\ldots+a_{1s}\frac{u_s}{u_1}\right)-\left(\frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx}+\ldots+\frac{1}{u_s}\frac{du_s}{dx}\right).$$

Mais, d'après la relation (13), on a

$$a_{12}\frac{u_2}{u_1}+\ldots+a_{1s}\frac{u_s}{u_1}=-a_{11}+\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}.$$

On a donc

$$A_{22}+\ldots+A_{nn}=(a_{11}+\ldots+a_{nn})-\left(\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}+\ldots+\frac{1}{u_s}\frac{du_s}{dx}\right).$$

On aura, par suite,

$$\Delta=e^{\int\left(\sum_i A_{ii}\right)dx}=e^{\int\left(\sum_i a_{ii}\right)dx}e^{-\int\sum_{i=1}^{i=s}\frac{1}{u_i}\frac{du_i}{dx}dx},$$

d'où

$$\Delta=De^{-\log(u_1,u_2,\ldots,u_s)},$$

ou enfin

$$D=\Delta.u_1,u_2,\ldots,u_s.$$

18. Comme première conséquence, imaginons qu'on donne d'abord le déterminant D et qu'on dirige le calcul de manière à obtenir le déterminant Δ. On voit que D et Δ ne pourront s'annuler l'un sans l'autre, car le produit $u_1,\ldots,u_s$ ne s'annulerait que si Δ était infini, c'est-à-dire si la variable x passait par un point singulier des coefficients A et, par suite, par un point singulier des coefficients a. On peut donc dire qu'à un déterminant D d'un système fondamental de solutions du système (A) on peut faire correspondre un déterminant Δ d'un système fondamental de solutions du système (17), et cette propriété peut évidemment s'étendre aux systèmes d'équations auxiliaires successifs.

19. Comme autre conséquence, on peut mettre le déterminant D sous la forme d'un produit de facteurs.

En effet, soient $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-2}$ les déterminants des systèmes fondamentaux de solutions des équations auxiliaires successives. On a

$$D=\Delta\, u_1,u_2,\ldots,u_s,$$
$$\Delta=\Delta_1 v_1,v_2,\ldots,v_{s'},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta_{n-2}=w.$$

En multipliant membre à membre, on a

$$D = u_1 u_2 \ldots u_s v_1 \ldots v_{s'} \ldots w.$$

20. L'étude d'une équation linéaire et homogène d'ordre n de la forme

$$(27) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y$$

se ramène à celle d'un système d'équations linéaires et homogènes.

Posons, en effet,

$$(28) \qquad \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = y_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

et

$$(29) \qquad y = y_n.$$

Nous obtiendrons le système d'équations linéaires et homogènes

$$(30) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n, \\ \dfrac{dy_k}{dx} = y_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n). \end{cases}$$

Réciproquement, le système (30) se ramène à l'équation (27) par les substitutions inverses.

21. Considérons l'équation

$$(31) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{p_1}{x} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{p_n}{x^n} y,$$

et supposons les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ holomorphes dans le domaine de l'origine. On peut, par une substitution un peu différente de la précédente, ramener cette équation particulière à la forme (2) (§ 3). Ce calcul étant important dès maintenant, posons

$$(32) \qquad \begin{cases} y = x^{n-1} u_n, \\ \dfrac{dy}{dx} = x^{n-2} u_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = u_1. \end{cases}$$

Nous aurons d'abord

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{p_1}{x}u_1 + \ldots + \frac{p_n}{x}u_n,$$

et ensuite nous obtiendrons les deux équations

$$\frac{d^k y}{dx^k} = x^{n-k-1}u_{n-k},$$

$$\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = x^{n-k-2}u_{n-k-1},$$

d'où nous tirerons

$$(n-k-1)x^{n-k-1}\frac{u_{n-k}}{x} + x^{n-k-1}\frac{du_{n-k}}{dx} = \frac{d^{k+1}y}{dx}k+1 = x^{n-k-1}\frac{u_{n-k-1}}{x},$$

ou encore

$$\frac{du_{n-k}}{dx} = \frac{u_{n-k-1}}{x} - \frac{(n-k-1)u_{n-k}}{x}.$$

Nous aurons donc le système d'équations linéaires et homogènes de la forme (2)

$$(33)\qquad \begin{cases} x\dfrac{du_1}{dx} = p_1 u_1 + \ldots + p_n u_n, \\ x\dfrac{du_2}{dx} = u_1 - u_2, \\ x\dfrac{du_3}{dx} = u_2 - 2u_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x\dfrac{du_n}{dx} = u_{n-1} - (n-1)u_n. \end{cases}$$

22. Il est utile, pour la suite, de former l'équation $F(r) = 0$ de la forme (7) (§ 3), en supposant que l'on ait

$$p = p^0 + p'x + p^{(2)}x^2 + \ldots.$$

Cette équation a la forme

$$(34)\qquad \begin{vmatrix} p_1^0 - r & p_2^0 & p_3^0 & \ldots & p_n^0 \\ 1 & -1-r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -2-r & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -(n-1)-r \end{vmatrix} = 0.$$

On remarquera que les mineurs du premier ordre du déterminant que l'on vient d'écrire ne peuvent avoir d'autre *plus grand commun diviseur* que l'unité.

En effet, le mineur

$$\begin{vmatrix} 1 & -1-r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2-r & \dots & 0 \\ \cdot & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(n-2)-r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

est égal à l'unité.

Nous verrons plus tard les conséquences importantes de ce fait (Chap. IV).

23. Revenons à l'équation générale

$$(27) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n y_n,$$

qu'on peut ramener au système

$$(30) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = p_1 y_1 + \dots + p_n y_n, \\ \dfrac{dy_k}{dx} = y_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \dots, n). \end{cases}$$

par les substitutions

$$(28) \qquad \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = y_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$(29) \qquad y = y_n.$$

Le déterminant d'un système de solutions du système d'équations (30) peut se mettre sous la forme

$$(35) \qquad D = \begin{vmatrix} y_1 \; \dfrac{dy_1}{dx}, & \dots, & \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \\ \dots\dots, & \dots, & \dots\dots, \\ y_n \; \dfrac{dy_n}{dx}, & \dots, & \dfrac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

S'il est différent de zéro, les n fonctions $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont linéairement indépendantes; car, s'il existait entre elles une relation linéaire et homogène à coefficients constants de la forme

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0,$$

la même relation existerait entre les dérivées successives, c'est-à-dire entre les

éléments des diverses colonnes de D. Donc D serait nul identiquement, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Lorsque l'on a $D \neq 0$, les n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, qui sont appelées dans tous les cas des *intégrales de l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n*, forment alors un *système fondamental d'intégrales* de cette équation différentielle.

On a toujours

$$D = C e^{\int p_1 dx}, \tag{36}$$

puisque la somme Σa_{ii} se réduit à p_1 dans les équations (30).

Si le déterminant D est identiquement nul, il existe entre les intégrales y_1, $y_2, \ldots, y_n$ au moins une relation linéaire et homogène à coefficients constants. En effet, d'après le n° 11, il existe plus généralement n relations de la forme

$$C_1 \frac{d^k y_1}{dx^k} + \ldots + C_n \frac{d^k y_n}{dx^k} = 0$$

$$\left(\frac{d^0 y_i}{dx^0} = y_i;\ k = 0, 1, \ldots, n-1\right).$$

Entre $n+1$ intégrales il existe toujours une relation linéaire et homogène à coefficients constants. En effet, d'après le même numéro, on a plus généralement n relations de la forme

$$C_1 \frac{d^k y_1}{dx^k} + \ldots + C_{n+1} \frac{d^k y_{n+1}}{dx^k} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Nous énoncerons encore les théorèmes suivants :

α. *Toute intégrale d'une équation linéaire et homogène d'ordre n peut s'obtenir par une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des intégrales d'un système fondamental.*

β. *Si l'on substitue aux intégrales d'un système fondamental d'autres intégrales déterminées par les relations linéaires et homogènes à coefficients constants*

$$Y_i = C_{i1} y_1 + \ldots + C_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient un nouveau système d'intégrales à condition que le déterminant des constantes de la substitution soit différent de zéro.

Toutes ces propriétés peuvent se démontrer directement. Les démonstrations directes sont très connues, surtout depuis la publication du premier Mémoire de M. Fuchs sur les équations linéaires (1866).

24. Soit u une intégrale donnée de l'équation différentielle (27) et, par suite, soient

$$u, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$$

les éléments d'une solution du système

$$(30) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = p_1 y_1 + \dots + p_n y_n, \\ \dfrac{dy_k}{dx} = y_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \dots, n). \end{cases}$$

Posons

$$y_n = y = uv,$$

d'où

$$y_{n-1} = \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

$$y_{n-2} = \frac{d^2y}{dx^2} = u\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$y_1 = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = u\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \frac{n-1}{1}\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \dots + v\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}.$$

Portons ces valeurs dans les équations (30). Cherchons le coefficient de v dans la première équation (30) ramenée à la forme

$$\frac{dy_1}{dx} - p_1 y_1 - \dots - p_n y_n = 0.$$

Nous trouverons

$$\frac{d^n u}{dx^n} - p_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} - \dots - p_n u,$$

c'est-à-dire zéro, puisque u est une intégrale de l'équation (27).

Les autres équations (30) seront identiquement satisfaites, en vertu même de la définition de l'inconnue v.

Il résulte de là que, si l'on élimine les variables $y_1, y_2, \dots, y_n$, les équations (30) fourniront des équations où entreront les seules inconnues

$$\frac{dv}{dx}, \quad \frac{d^2v}{dx^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^n v}{dx^n},$$

et, par suite, en posant

$$\frac{dv}{dx} = t, \qquad \text{d'où} \qquad v = \int t\,dx,$$

on pourra prendre pour inconnues nouvelles t et ses dérivées. Nous poserons

$$\begin{aligned} t &= t_{n-1}, \\ \frac{dt}{dx} &= t_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{d^{n-2}t}{dx^{n-2}} &= t_1. \end{aligned}$$

D'abord, chacune des équations (30) de la forme

$$\frac{dy_k}{dx} = y_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

étant identiquement satisfaite, il ne restera que la condition

$$\frac{dy_1}{dx} = p_1 y_1 + \ldots + p_n y_n$$

ou

$$\left(\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)\right)^n = p_1\left(\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)\right)^{n-1} + \ldots + p_n uv.$$

Les doubles parenthèses indiquent des puissances symboliques. On a vu que le coefficient de v est identiquement nul, et qu'on peut prendre pour inconnues nouvelles $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$.

L'équation précédente prendra donc la forme

$$\frac{dt_1}{dx} = P_1 t_1 + \ldots + P_{n-1} t_{n-1}. \tag{37}$$

Il est facile de voir que l'on aura

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{u}\left[-\frac{n}{1}\frac{du}{dx} + p_1 u\right], \\ P_2 &= \frac{1}{u}\left[-\frac{n(n-1)}{2}\frac{d^2u}{dx^2} + (n-1)p_1\frac{du}{dx} + p_2 u\right], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_{n-1} &= \frac{1}{u}\left[-\frac{n(n-1)\ldots2.1}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + p_1\frac{(n-1)\ldots3.2.1}{1.2\ldots(n-2)}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \ldots + p_{n-1}u\right]. \end{aligned}$$

En conséquence, le système (30) sera ramené à un système de même forme renfermant une inconnue de moins, soit au système

$$(38) \qquad \begin{cases} \dfrac{dt_1}{dx} = P_1 t_1 + \ldots + P_{n-1} t_{n-1}, \\ \dfrac{dt_k}{dx} = t_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2). \end{cases}$$

Mais on aura

$$\frac{d^{n-k-1}t}{dx^{n-k-1}} = t_k,$$

ce qui correspond à la formule (28).

Comparons ce résultat avec celui que donne la théorie générale. Remarquons d'abord que tous les éléments

$$u_n = u, \qquad u_{n-1} = \frac{du}{dx}, \qquad \ldots, \qquad u_1 = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$$

d'une solution du système (30) sont différents de zéro jusqu'à un certain ordre de dérivation, par exemple jusqu'à

$$\frac{d^{s-1}u}{dx^{s-1}} = u_{n-s+1},$$

et même ce cas ne se présentera que si u est un polynome d'un degré en x inférieur à $n-1$.

Dans la théorie générale, on pose

$$y_h = u_h q_h.$$

Par suite, les équations

$$\frac{dy_k}{dx} = y_{k-1}$$

deviennent

$$\frac{du_k}{dx} q_k + \frac{dq_k}{dx} u_k = u_{k-1} q_{k-1},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dq_k}{dx} = \frac{u_{k-1}}{u_k} q_{k-1} - \frac{1}{u_k} \frac{du_k}{dx} q_k.$$

En tenant compte de l'équation

$$\frac{du_k}{dx} = u_{k-1},$$

on a

$$(39) \qquad \frac{dq_k}{dx} = \frac{u_{k-1}}{u_k}(q_{k-1} - q_k) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

La première équation (30) devient

$$\frac{du_1}{dx} q_1 + \frac{dq_1}{dx} u_1 = p_1 u_1 q_1 + \ldots + p_n u_n q_n.$$

Par suite, à cause de l'équation

$$\frac{du_1}{dx} = p_1 u_1 + \ldots + p_n u_n,$$

on a

$$(40) \qquad \frac{dq_1}{dx} = p_2 \frac{u_2}{u_1}(q_2 - q_1) + \ldots + p_n \frac{u_n}{u_1}(q_n - q_1).$$

Si l'on pose ensuite

$$z_k = q_k - q_1,$$

on aura, en retranchant successivement l'équation (40) de chacune des équations (39), les équations

$$\frac{dz_k}{dx} = \frac{u_{k-1}}{u_k}(z_{k-1} - z_k) - p_2 \frac{u_2}{u_1} z_2 + \ldots - p_n \frac{u_n}{u_1} z_n \quad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

formant un système linéaire et homogène à $n-1$ inconnues, auquel il faudra joindre l'équation

$$\frac{dq_1}{dx} = p_2 \frac{u_2}{u_1} z_2 + \ldots + p_n \frac{u_n}{u_1} z_n.$$

Il est évident maintenant que la méthode qui est particulière aux équations (30) et qui conduit aux équations (38), *exactement de même forme* que les équations données, doit être préférée à la méthode générale qui conduit simplement à des équations linéaires et homogènes.

D'ailleurs, les équations (38) jouissent des mêmes propriétés que les équations en z de la théorie générale. En effet, nous pouvons montrer que si t_1, t_2, ..., t_{n-1} forment un système fondamental d'intégrales de l'équation

$$\frac{dt^{n-1}}{dx^{n-1}} = \mathrm{P}_1 \frac{d^{n-2} t}{dx^{n-2}} + \mathrm{P}_2 \frac{d^{n-3} t}{dx^{n-3}} + \ldots + \mathrm{P}_{n-1} t,$$

les expressions

$$\mathrm{Y}_1 = u, \qquad \mathrm{Y}_2 = u \int t_1\, dx, \qquad \mathrm{Y}_n = u \int t_{n-1}\, dx$$

forment un système fondamental d'intégrales de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y.$$

En effet, s'il existait une relation linéaire et homogène à coefficients constants telle que

$$\mathrm{C}_1 \mathrm{Y}_1 + \ldots + \mathrm{C}_n \mathrm{Y}_n = 0,$$

on en déduirait la relation

$$\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 \int t_1\, dx + \mathrm{C}_3 \int t_2\, dx + \ldots + \mathrm{C}_n \int t_{n-1}\, dx = 0,$$

d'où, en dérivant,

$$C_2 t_1 + C_3 t_2 + \ldots + C_n t_{n-1} = 0,$$

relation incompatible avec les hypothèses.

25. Résumons le paragraphe précédent. Si y_1 est une intégrale de l'équation différentielle linéaire et homogène

$$(27) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y,$$

la substitution

$$y = y_1 \int t \, dx$$

conduit à une équation

$$(41) \qquad \frac{d^{n-1} t}{dx^{n-1}} = P_1 \frac{d^{n-2} t}{dx^{n-2}} + \ldots + P_{n-1} t,$$

linéaire et homogène, d'ordre $n - 1$, et, avec un système fondamental d'intégrales de l'équation (41), on peut former un système fondamental d'intégrales de l'équation (27).

De l'équation

$$P_1 = -\frac{n}{y_1} \frac{dy_1}{dx} + p_1,$$

obtenue plus haut, on tire

$$\int P_1 \, dx = -n \operatorname{Log} y_1 + \int p_1 \, dx,$$

et, en appelant D_1 le déterminant D (équation 35), correspondant à l'équation (39), on voit qu'on aura

$$D_1 = C y_1^{-n} D.$$

De l'équation en t, au moyen d'une solution t_1, on passe à une équation en τ linéaire et homogène d'ordre $n - 2$, etc.

Soient $y_1, t_1, \tau_1, \ldots, \sigma$ les diverses intégrales supposées successivement connues, on voit facilement qu'on aura la relation

$$D = C y_1^n t_1^{n-1} \tau_1^{n-2} \ldots \sigma.$$

On peut voir dans le Mémoire de M. Fuchs les conséquences que l'on tire de cette dernière relation.

CHAPITRE II.

DES DIVISEURS ÉLÉMENTAIRES.

26. Représentons par [P], [Q] et [P, Q] les déterminants

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_{11} & \ldots & B_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n1} & \ldots & B_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} pA_{11}+qB_{11} & \ldots & pA_{1n}+qB_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ pA_{n1}+qB_{n1} & \ldots & pA_{nn}+qB_{nn} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant [P, Q] est une fonction entière et homogène en p, q. Nous n'aurons à nous occuper que du cas où cette fonction est du degré n, et non pas d'un degré inférieur; nous supposerons donc que le degré est n.

Ce déterminant [P, Q] est alors un produit de n facteurs linéaires et homogènes, de la forme $ap + bq$ et distincts ou non.

Considérons au même point de vue les mineurs des divers ordres. Soit l_ϖ l'exposant du diviseur $ap + bq$ qui entre dans le plus grand commun diviseur de tous les mineurs d'ordre ϖ. Soit $l_{\varpi+1}$ l'exposant correspondant à l'ordre $\varpi + 1$. L'expression

$$(ap + bq)^{l_\varpi - l_{\varpi+1}}$$

a été appelée par M. Weierstrass *un diviseur élémentaire du déterminant* [P, Q].

27. Soit $ap + bq$ un quelconque des *diviseurs linéaires* de [P, Q]. Nous opposerons cette expression à celle de *diviseur élémentaire,* chacune de ces deux sortes de diviseurs correspondant à une décomposition spéciale du déterminant [P, Q], comme nous allons le montrer.

Les mineurs de l'ordre ϖ du déterminant [P, Q] sont du degré $n - \varpi$ en p et q et peuvent être décomposés en facteurs linéaires en p et q. Je dis d'abord que l'exposant l_ϖ d'un même diviseur linéaire $ap + bq$ ne peut aller qu'en décroissant quand l'indice ϖ augmente; sous la notation l_ϖ nous comprenons aussi l'exposant l_0 du même diviseur linéaire dans le déterminant [P, Q], considéré alors comme un mineur d'ordre zéro.

D'abord tout déterminant de degré $n - \varpi + 1$ peut être considéré comme une somme de termes dont chacun, abstraction faite du signe, est le produit d'un déterminant du degré $n - \varpi$ par un élément de [P, Q]. Donc, tout diviseur commun des mineurs de degré $n - \varpi$ doit être aussi un diviseur commun des

mineurs de degré $n - \varpi + 1$, et, par suite, aussi, de tous les mineurs de degrés supérieurs à $n - \varpi + 1$. En conséquence, si l'un des nombres l_0, l_1, l_2, ... est nul, tous les suivants sont nuls.

Ensuite, si l'on considère un mineur du degré $n - \varpi + 1$, ses dérivées partielles par rapport à p et à q peuvent être considérées comme des sommes de termes dont chacun est le produit d'un déterminant de degré $n - \varpi$ par un terme de [P] ou de [Q]; si donc les mineurs de degré $n - \varpi$ admettent le diviseur linéaire $ap + bq$ au degré l_ϖ, le mineur de degré $n - \varpi + 1$ et ses dérivées partielles du premier ordre admettront en commun ce diviseur linéaire au même degré l_ϖ. Il faut alors que le mineur de degré $n - \varpi + 1$ soit divisible par $(ap + bq)^{l_\varpi + 1}$.

Soit l_r le dernier exposant l qui ne soit pas nul. On aura les inégalités

$$l_0 > l_1 > l_2 > \ldots > l_r,$$

et l'on pourra poser

$$l_0 - l_1 = e_0, \qquad l_1 - l_2 = e_1, \qquad \ldots, \qquad l_{r-1} - l_r = e_{r-1}, \qquad l_r = e_r.$$

On aura alors

$$l_0 = e_0 + e_1 + \ldots + e_r$$

et

$$(ap + bp)^{l_0} = (ap + bq)^{e_0} (ap + bq)^{e_1} + \ldots + (ap + bq)^{e_r}.$$

Soient ensuite $a_1 p + b_1 q$, $a_2 p + b_2 q$, ..., $a_m p + b_m q$ les diviseurs linéaires distincts du déterminant [P, Q]. Soient l_0^1, l_0^2, ..., l_0^m leurs exposants. Décomposons ces nombres en éléments e d'après les règles précédentes, de sorte que l'on ait, par exemple,

$$l_0^i = e_0^i + e_1^i + \ldots + e_{r_i}^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Le déterminant [P, Q] pourra être représenté par le produit

$$\Pi (a_i p + b_i q)^{e_j^i} \qquad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \quad \ldots, m, \\ j = 0, 1, \quad \ldots, r_i. \end{array} \right.$$

Chacun des facteurs de ce produit est, comme nous l'avons dit dès l'abord, un *diviseur élémentaire* du déterminant [P, Q],

On voit que *chaque diviseur élémentaire est essentiellement caractérisé par le rapport de deux coefficients a et b et par un exposant e.*

Nous montrerons dans la suite que chaque diviseur élémentaire est *indépendant* dans chacune de ses propriétés. Nous pourrons alors représenter tous les diviseurs élémentaires dans un ordre quelconque par la notation

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad (a_2 p + b_2 q)^{e_2}, \quad \ldots, \quad (a_\rho p + b_\rho q)^{e_\rho}.$$

Mais les indices 1, 2, ..., ρ n'indiqueront plus que les diviseurs linéaires

$a_1 p + b_1 q$, ..., $a_\rho p + b_\rho q$ soient nécessairement distincts. Plusieurs pourront être égaux entre eux. On aura de plus

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_\rho = n,$$

et le nombre ρ sera égal ou supérieur au nombre des diviseurs linéaires distincts.

28. Un diviseur élémentaire $(ap + bq)^e$ du déterminant $[P, Q]$ est dit simple ou multiple, suivant que son exposant e est égal ou supérieur à l'unité.

Si, par exemple, tous les diviseurs élémentaires fournis par un même diviseur linéaire sont *simples*, on voit que le déterminant $[P, Q]$ sera divisible par $(ap + bq)^{r+1}$; ses mineurs du premier ordre seront divisibles par $(ap + bq)^r$, ..., ses mineurs de l'ordre r seront divisibles par $ap + bq$.

Si au contraire les diviseurs élémentaires fournis par un même diviseur linéaire ne sont pas tous simples, remarquons que nous aurons

$$\begin{aligned} l_0 &= e_0 + e_1 + \ldots + e_r, \\ l_0 - e_0 = l_1 &= e_1 + \ldots + e_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_{\varpi-1} - e_{\varpi-1} = l_\varpi &= e_\varpi + \ldots + e_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_{r-1} - e_{r-1} = l_r &= e_r, \end{aligned}$$

et nous voyons que le déterminant $[P, Q]$ et ses mineurs d'ordres successifs seront respectivement divisibles par

$$\begin{aligned} &(ap + bq)^{e_0 + e_1 + \ldots + e_r}, \\ &(ap + bq)^{e_1 + \ldots + e_r}, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ &(ap + bq)^{e_r}. \end{aligned}$$

Les ordres de multiplicité d'un diviseur $ap + bq$, considéré comme *diviseur linéaire*, ou comme *diviseur élémentaire*, sont, comme on le voit, deux nombres essentiellement distincts.

Ajoutons une remarque :

Il n'y a *jusqu'ici* entre les nombres e_0, e_1, ..., e_r aucune relation nécessaire. Ce sont simplement des nombres entiers qui concourent à former les nombres l_r, l_{r-1}, ..., l_0, ces derniers nombres allant toujours en croissant, quand leur indice diminue.

29. Il y a un lien très étroit entre la théorie des formes bilinéaires et la théorie des diviseurs élémentaires, et c'est précisément l'application des théorèmes de l'une de ces théories aux théorèmes de l'autre qui nous conduira à des consé-

quences très importantes pour la théorie des équations linéaires. Nous allons, par suite, nous occuper de ces questions spéciales.

On dit que les deux expressions

$$\left.\begin{array}{l} P = \Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \\ Q = \Sigma B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \end{array}\right\} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

sont *deux formes bilinéaires aux* $2n$ *variables* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Les déterminants de ces formes sont, par définition, les déterminants $[P]$ et $[Q]$.

Faisons les substitutions

$$x_i = \sum_j h_{ij} x'_j,$$

$$y_i = \sum k_{ij} y'_j,$$

aux déterminants de constantes H et K supposés tous deux différents de zéro.

Les formes

$$P(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_n) \quad \text{et} \quad Q(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_n)$$

ou, avec une notation plus simple, les formes

$$P(x \mid y) \quad \text{et} \quad Q(x \mid y)$$

deviendront

$$P'(x' \mid y') \quad \text{et} \quad Q'(x' \mid y').$$

Nous allons montrer que *les déterminants des deux formes*

$$pP + qQ \quad \text{et} \quad pP' + qQ'$$

admettent les mêmes diviseurs élémentaires.

30. Supposons que l'on ne fasse d'abord que la première substitution. Les formes

$$P(x \mid y) \quad \text{et} \quad Q(x \mid y)$$

deviendront

$$P_1(x' \mid y) \quad \text{et} \quad Q_1(x' \mid y).$$

Si ensuite on fait la seconde substitution, on obtiendra les formes

$$P'(x' \mid y') \quad \text{et} \quad Q'(x' \mid y').$$

Il suffit de démontrer que le déterminant de la forme

$$pP_1 + qQ_1$$

a les mêmes diviseurs élémentaires que le déterminant de la forme

$$pP + qQ;$$

car on passera, par le même procédé de démonstration, des diviseurs élémentaires de la forme

$$pP_1 + qQ_1$$

à ceux de la forme

$$pP' + qQ'.$$

On sait, d'après la théorie des déterminants, que l'on a

$$[P_1, Q_1] = [P, Q] \times H.$$

Donc déjà les diviseurs linéaires distincts des deux déterminants

$$[P_1, Q_1] \quad \text{et} \quad [P, Q]$$

sont les mêmes. Il reste à faire voir qu'ils fournissent les mêmes diviseurs élémentaires. Nous montrerons pour cela que, si un diviseur linéaire est facteur à un certain degré de multiplicité dans tous les mineurs d'un ordre donné de $[P, Q]$, il est aussi facteur au même degré de multiplicité dans les mineurs du même ordre de $[P_1, Q_1]$ et réciproquement.

Représentons les mineurs de degré μ des trois déterminants

$$[P, Q], \quad H, \quad [P_1, Q_1]$$

par

$$m_{\gamma\delta}, \quad \eta_{\gamma\delta}, \quad m'_{\gamma\delta},$$

γ et δ désignant deux combinaisons quelconques des nombres 1, 2, ..., n pris μ à μ. On a, d'après Cauchy [1], la relation

$$m'_{\gamma\delta} = \eta_{\gamma 1} m_{\delta 1} + \eta_{\gamma 2} m_{\delta 2} + \ldots + \eta_{\gamma c} m_{\delta c}.$$

Le nombre c est celui des combinaisons indiquées et est égal à

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}.$$

Si tous les mineurs $m_{\delta\gamma}$ admettent le même diviseur $(ap + bq)^l$, $m'_{\gamma\delta}$ admettra ce même diviseur pour toutes les valeurs qu'on peut donner à γ et δ.

Réciproquement, si tous les mineurs $m'_{\gamma\delta}$ admettent le même diviseur $(ap + bq)^l$,

---

(1) *Voir* la Note sur les déterminants.

il en sera de même des expressions

$$\eta_{\gamma 1} m_{\delta 1} + \ldots + \eta_{\gamma c} m_{\delta c}.$$

Mais le déterminant $\Sigma \eta_{11} \eta_{22} \ldots \eta_{cc}$ est une puissance de H et n'est pas nul ([1]). Donc $m_{\delta_1}, \ldots, m_{\delta_c}$ admettent séparément le diviseur $(ap+bq)^l$, et pour toutes les valeurs que l'on peut donner à δ.

Enfin, si les mineurs d'un certain ordre de [P, Q] n'ont aucun diviseur commun, il en sera de même des mineurs du même ordre de $[P_1, Q_1]$, sans quoi l'on pourrait démontrer que les mineurs considérés dans [P, Q] ont contrairement à l'hypothèse un diviseur commun.

Il est donc prouvé que les diviseurs élémentaires du déterminant [P, Q] ne sont pas altérés par la double substitution

$$x_1, \ldots, x_n \mid x'_1, \ldots, x'_n, \quad \text{et} \quad y_1, \ldots, y_n \mid y'_1, \ldots, y'_n.$$

31. Ce théorème admet la réciproque suivante :

Soient deux couples de formes bilinéaires

$$P(x \mid y) \quad \text{et} \quad Q(x \mid y)$$

et

$$P'(x' \mid y'), \quad Q'(x' \mid y').$$

Si les deux déterminants [P, Q] *et* [P', Q'] *ont les mêmes diviseurs élémentaires, on peut déterminer* $2n^2$ *constantes* h *et* k *telles que les substitutions*

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \sum_j h_{ij} x'_j \\ y_i &= \sum_j k_{ij} y'_j \end{aligned}\right\} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

changent P *en* P' *et* Q *en* Q'.

Nous démontrerons cette importante réciproque par une belle méthode due à M. Darboux.

32. Soit une forme bilinéaire aux $2n$ variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$

$$P = \Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta.$$

Appelons $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les dérivées partielles de P par rapport à $x_1, x_2, \ldots,$

([1]) *Voir* la Note sur les déterminants.

x_n et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les dérivées partielles de P par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} X_i = A_{i1}y_1 + \ldots + A_{in}y_n \\ Y_i = A_{1i}x_1 + \ldots + A_{ni}x_n \end{array}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le déterminant formé par les n^2 coefficients A et qui a l'une des deux formes

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

est appelé le *déterminant* de la forme P.

On remarquera la relation

$$x_1 X_1 + \ldots + x_n X_n = y_1 Y_1 + \ldots + y_n Y_n = P.$$

33. Appelons B_0 le déterminant de la forme P et formons toutes les expressions que peut donner le déterminant B_0 *bordé* comme nous allons l'indiquer. Posons

$$B_0 = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} & u_1^1 & \ldots & u_1^\theta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} & u_n^1 & \ldots & u_n^\theta \\ v_1^1 & \ldots & v_n^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^\theta & \ldots & v_n^\theta & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Chaque bordure, la $k^{\text{ième}}$ par exemple, distinguée par l'indice supérieur k, est obtenue au moyen de $2n$ arbitraires formant deux groupes distincts, soient $u_1^k, \ldots, u_n^k$ pour la bordure en colonne et $v_1^k, \ldots, v_n^k$ pour la bordure en ligne.

Développons B_θ [1] par la règle de *Laplace* [2] en combinant les éléments des θ dernières colonnes de toutes les manières possibles, de façon à former des mineurs de degré θ, et en multipliant chacun de ces mineurs par le mineur de degré n qui reste quand on a supprimé les θ dernières colonnes et les θ lignes choisies.

Les produits du degré $n + \theta$ que l'on obtient ainsi renferment des paramètres v provenant de toutes les bordures et sont du degré $n - \theta$ par rapport aux éléments du déterminant B_0. La même règle de Laplace est applicable à chaque mineur de degré n.

---

(1) Les déterminants B_θ pourraient être appelés des *Hessiens bordés*.

(2) *Voir* la Note sur les déterminants.

Donc B_θ *est une fonction linéaire et homogène des mineurs d'ordre* θ *de* B_0 *quelles que soient les valeurs attribuées aux arbitraires* u *et* v.

34. Si l'on connaît le déterminant $[P, Q]$, qu'on peut représenter par $B_0(p, q)$, on voit que la fonction $B_\theta(p, q)$ sera entière et homogène en p et q, et, si les mineurs de degré $n-\theta$ de $B_0(p, q)$ sont divisibles par $(ap+bq)^l$, on voit que $B_\theta(p, q)$ sera divisible par $(ap+bq)^l$. On peut d'ailleurs choisir les arbitraires qui entrent dans B_θ de manière qu'il se réduise à l'un quelconque des mineurs de B_0. Par exemple, on a

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1,k+1} & \ldots & A_{1n} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ A_{k+1,1} & \ldots & A_{k+1,k+1} & \ldots & A_{k+1,n} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & . & \ldots & . \\ A_{n1} & \ldots & A_{n,k+1} & \ldots & A_{nn} & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{k1} & \ldots & A_{kk} \end{vmatrix}.$$

Donc, pour qu'un diviseur $(ap+bq)^l$ *soit commun à tous les mineurs d'ordre* θ *de* $[P, Q]$, *il faut et il suffit qu'il divise la fonction* $B_\theta(p, q)$ *correspondante, quelles que soient les valeurs attribuées aux arbitraires.*

On pourrait en conséquence définir les diviseurs élémentaires de $[P, Q]$ au moyen des déterminants $B_\theta(p, q)$.

35. La première forme B_θ est

$$B_1 = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} & u_1^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & .. \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} & u_n^1 \\ v_1^1 & \ldots & v_n^1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En la développant, on a

$$B_1 = -\sum u_i^1 v_j^1 \frac{\partial B_0}{\partial A_{ij}}.$$

Si l'on retranche de la dernière colonne les autres multipliées par $y_1, y_2, \ldots, y_n$, puis ensuite que l'on retranche de la dernière ligne les autres multipliées par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a

$$B_1 = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} & & u_1^1 - X_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots\ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} & & \\ v_1^1 - Y_1 & \ldots & v_n^1 - Y_n & \ldots & -(u_1^1 x_1 + \ldots + u_n^1 x_n) - (v_1^1 y_1 + \ldots + v_n^1 y_n) + (x_1 X_1 + \ldots + x_n X_n) \end{vmatrix}.$$

Si l'on remplace alors les arbitraires u et v par les dérivées X, Y de la forme bilinéaire P, on aura

$$B_1 = -B_0 P.$$

Cette formule permet d'exprimer P en fonction de B_1 et de B_0.

36. La fonction $B_{\theta+1}$ est liée à la fonction B_θ par la relation simple

$$B_{\theta+1} = -\sum u_i^{\theta+1} v_j^{\theta+1} \frac{\partial B_\theta}{\partial A_{ij}}.$$

37. La dernière fonction B_θ est B_n, car toutes les fonctions suivantes $B_{n+n'}$ se réduiraient à zéro.

On a

$$B_n = (-1)^n \begin{vmatrix} u_1^1 & \dots & u_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_n^1 & \dots & u_n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ v_1^n & \dots & v_n^n \end{vmatrix}.$$

38. Étant donné un déterminant quelconque

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

on démontre, dans la théorie des déterminants (¹), que l'on a toujours

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{rs}} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{r_1 s_1}} - \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{r_1 s}} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{r s_1}} = \Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha_{rs}\, \partial \alpha_{r_1 s_1}}.$$

Cette proposition va nous être du plus grand secours dans le calcul que nous allons entreprendre.

Nous appliquerons ce théorème à des fonctions telles que B_θ, que nous représenterons par la notation

$$B(u^1, \dots, u^\theta; v^1, \dots, v^\theta),$$

ou par la notation

$$B(u^\theta; v^\theta),$$

en n'indiquant que les éléments les plus indispensables.

Introduisons dans notre calcul l'expression

$$R_\theta = B(u^{n-\theta}, X; v^{n-\theta}, Y),$$

(¹) *Voir* la Note sur les déterminants.

qui se tire de $B_{n-\theta+1}$ en remplaçant les éléments de la dernière bordure par les dérivées partielles de la forme P.

Nous aurons

$$R_0 = B(u^n, X; v^n, Y) = 0.$$

Appliquons le théorème rappelé plus haut à l'expression R_θ, nous aurons

$$\begin{aligned} B(u^{n-\theta}; v^{n-\theta})\, B(u^{n-\theta-1}, X; v^{n-\theta-1}, Y) - B(u^{n-\theta-1}, X; v^{n-\theta})\, B(u^{n-\theta}; v^{n-\theta-1}, Y) \\ = B(u^{n-\theta-1}; v^{n-\theta-1})\, B(u^{n-\theta}, X; v^{n-\theta}, Y), \end{aligned}$$

et, si nous posons

$$\begin{aligned} B(u^{n-\theta-1}, X; v^{n-\theta}) &= U_{\theta+1}, \\ B(u^{n-\theta}; v^{n-\theta-1}, Y) &= V_{\theta+1}, \end{aligned}$$

nous aurons la formule

$$R_{\theta+1} B_{n-\theta} - U_{\theta+1} V_{\theta+1} = B_{n-\theta-1} R_\theta,$$

ou, en changeant θ en $\theta - 1$,

$$R_\theta B_{n-\theta+1} - U_\theta V_\theta = B_{n-\theta} R_{\theta-1}.$$

Appliquons cette formule plusieurs fois de suite et ajoutons à ces résultats une identité déjà démontrée, nous aurons

$$\begin{aligned} R_1 B_n \quad - U_1 V_1 &= 0, \\ R_2 B_{n-1} - U_2 V_2 &= R_1 B_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ R_n B_1 \quad - U_n V_n &= R_{n-1} B_0, \\ P \ B_0 \qquad\qquad &= - R_n. \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire ces équations sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{B_{n-1}} &= \frac{U_1 V_1}{B_n B_{n-1}}, \\ \frac{R_2}{B_{n-2}} &= \frac{U_2 V_2}{B_{n-1} B_{n-2}} + \frac{R_1}{B_{n-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{R_n}{B_0} &= \frac{U_n V_n}{B_1 B_0} + \frac{R_{n-1}}{B_1}, \\ -P &= \frac{R_n}{B_0}, \end{aligned}$$

et, en ajoutant, nous aurons la relation

$$(42) \qquad P = -\frac{U_1 V_1}{B_n B_{n-1}} - \frac{U_2 V_2}{B_{n-1} B_{n-2}} - \ldots - \frac{U_n V_n}{B_1 B_0}.$$

39. Les fonctions U_θ et V_θ sont respectivement des fonctions linéaires des X et des Y, et ne *renferment respectivement que les variables* $y_1, \ldots, y_n$ ou $x_1, \ldots, x_n$.

Les expressions B_θ sont des constantes qui dépendent des valeurs attribuées aux arbitraires u et v. *Nous concluons de là qu'il y a une infinité de manières de ramener une forme linéaire* (P) *à la forme*

$$\sum_\alpha A'_{\alpha\alpha} x'_\alpha y'_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{43}$$

Cette proposition correspond à la réduction d'une forme quadratique à une somme de carrés.

40. Mais le calcul précédent n'est valable que si les dénominateurs ne sont pas nuls. On peut toujours se placer dans ce cas si B_0 n'est pas nul, comme nous en ferons toujours l'hypothèse.

En effet, on a

$$B_{\theta+1} = -\Sigma\, u_i^{\theta+1} v_j^{\theta+1} \frac{\partial B_\theta}{\partial A_{ij}},$$

et l'on peut choisir les arbitraires $u^{\theta+1}$ et $v^{\theta+1}$ de manière que $B_{\theta+1}$ se réduise à un mineur quelconque $\frac{\partial B_\theta}{\partial A_{ij}}$ de B_θ (*voir* § 34). Tous les mineurs $\frac{\partial B_\theta}{\partial A_{ij}}$ ne sont pas nuls si B_θ n'est pas identiquement nul, car B_θ et son déterminant adjoint ne peuvent être nuls l'un sans l'autre [1].

Donc, si B_0 n'est pas identiquement nul, on peut choisir les arbitraires u^1, v^1 de manière que B_1 ne soit pas identiquement nul, puis les arbitraires u^2, v^2 de manière que B_2 ne soit pas identiquement nul, etc.

41. Si B_0 n'est pas nul, les fonctions $U_1, \ldots, U_n$, ou les fonctions $V_1, \ldots, V_n$, sont linéairement indépendantes.

En effet, dans le cas contraire, on pourrait par exemple poser

$$U_i = C_{i1} T_1 + \ldots + C_{ik} T_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k < n),$$

les nouvelles variables T étant indépendantes.

De là on conclurait par l'élimination de ces variables $n - k$ relations linéaires et homogènes entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Or, si l'on considère les dérivées partielles de P,

$$Y_i = a_{1i} x_1 + \ldots + a_{ni} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

(1) *Voir* la Note sur les Déterminants.

et l'une quelconque de ces $n-k$ relations

$$m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n = 0;$$

on pourrait éliminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et l'on obtiendrait un résultat de la forme

$$C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n = 0.$$

Ce résultat est incompatible avec l'indépendance linéaire des fonctions Y, indépendance caractérisée par la condition

$$B_0 \neq 0.$$

En résumé, la forme P peut être ramenée, d'une infinité de manières, à la forme (43), et il *sera impossible de diriger le calcul de façon que cette forme* (43) *renferme moins de variables indépendantes que* P.

42. Appliquons maintenant les principes précédents à la forme complexe

$$F = fs + \varphi,$$

où s est une indéterminée et où l'on a

$$f = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta.$$
$$\varphi = \Sigma b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta.$$

Nous supposerons que le déterminant de la forme f n'est pas nul. Par suite, le déterminant de la forme F, c'est-à-dire

$$B_0(s) = \begin{vmatrix} a_{11}s + b_{11} & \ldots & a_{1n}s + b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}s + b_{n1} & \ldots & a_{nn}s + b_{nn} \end{vmatrix},$$

ne sera pas nul non plus. Ce déterminant sera même de degré n par rapport à s.

Appliquons-lui le théorème de Gauss démontré au § 35. Nous aurons, avec la notation du § 38,

$$F = fs + \varphi = \frac{-B(X; Y)}{B_0(s)} = F(X, Y, s);$$

de sorte que s entrera dans F explicitement d'abord, puis implicitement par les X et les Y. Si l'on considère pour un moment les X et les Y comme des arbitraires, F se présentera sous la forme d'une fraction rationnelle en s, dont le dénominateur est du degré n et dont le numérateur est au plus du degré $n-1$. Mais, si X et Y sont les dérivées partielles de F, le numérateur pourra être du degré $n+1$.

Décomposons cette fraction rationnelle en une somme de n fractions simples,

en nous servant de la règle de Lagrange qui consiste à chercher, pour une racine s_i de $B_0(s) = 0$, le coefficient de $\frac{1}{\sigma}$ dans le développement de $\frac{F(s_i+\sigma)}{s-s_i-\sigma}$ (¹).

Nous donnerons d'abord à F la forme générale

$$F = -\frac{U_1 V_1}{B_n B_{n-1}} - \ldots - \frac{U_n V_n}{B_1 B_0},$$

et nous raisonnerons, sur un terme quelconque divisé par $s - s_i - \sigma$,

$$-\frac{U_{n-\theta+1} V_{n-\theta+1}}{(s-s_i-\sigma) B_\theta B_{\theta-1}}.$$

On a d'abord, avec les notations du § 38,

$$U_{n-\theta+1} = B(u^{\theta-1}, X;\ v^{\theta-1}) = \begin{vmatrix} a_{11}s+b_{11} & \ldots & a_{1n}s+b_{1n} & u_1^1 & \ldots & u_1^{\theta-1} & X_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}s+b_{n1} & \ldots & a_{nn}s+b_{nn} & u_n^1 & \ldots & u_n^{\theta-1} & X_n \\ v_1^1 & \ldots & v_n^1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^\theta & \ldots & v_n^\theta & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut remplacer la dernière colonne par une autre, obtenue en retranchant de celle-ci les n premières colonnes multipliées par $y_1, y_2, \ldots, y_n$. La nouvelle colonne, écrite horizontalement pour la commodité de l'écriture, devient

$$X_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad X_n - \frac{\partial F}{\partial x_n}, \quad -(v_1^1 y_1 + \ldots + v_n^1 y_n), \quad \ldots, \quad -(v_1^\theta y_1 + \ldots + v_n^\theta y_n).$$

Nous devons remplacer s par $s_i + \sigma$ dans $U_{n-\theta+1}$. Nous aurons alors

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = (s_i + \sigma)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

de sorte que, si maintenant nous supposons que X est la dérivée partielle de F, la dernière colonne deviendra

$$(s-s_i-\sigma)\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad (s-s_i-\sigma)\frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad U^1, \ldots, U^\theta,$$

et le déterminant, développé par rapport aux éléments de cette colonne, prendra la forme

$$U_{n-\theta+1} = (s - s_i - \sigma) M_1 + M_2.$$

(¹) *Voir* la Note sur la Règle de Lagrange.

Les coefficients de $U^1, \ldots, U^\theta$ sont des fonctions linéaires des mineurs d'ordre $\theta - 1$ de B_θ, de sorte que M_2 est au moins divisible par la même puissance de σ que $B_{\theta-1}$.

Quant à M_1 il est égal à $U_{n-\theta+1}$, quand on a remplacé $X_1, \ldots, X_n$ par

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

C'est donc une forme de B_θ et il est au moins divisible par la même puissance de σ que B_θ.

Soient l_θ et $l_{\theta-1}$ les exposants de σ dans B_θ et $B_{\theta-1}$. On sait que l'on a

$$l_{\theta-1} > l_\theta.$$

Posons dès lors

$$l_{\theta-1} - l_\theta = e_{\theta-1},$$

ou, pour simplifier l'écriture, posons simplement

$$l_{\theta-1} - l_\theta = e.$$

On voit que e est l'exposant d'un diviseur élémentaire correspondant au diviseur linéaire $s - s_i$ de $B_\theta(s)$.

On pourra donc écrire

$$U_{n-\theta+1} = (s - s_i - \sigma)\, \sigma^{l_\theta} M'_1 + \sigma^{l_{\theta-1}} M'_2,$$

M'_1 et M'_2 n'étant plus divisibles par σ. On aura, en outre,

$$B_\theta \;\;= \sigma^{l_\theta} \;\; B'_\theta,$$
$$B_{\theta-1} = \sigma^{l_{\theta-1}} B'_{\theta-1};$$

B'_θ et $B'_{\theta-1}$ sont deux quantités ne renfermant plus σ en facteur.

Cela posé, l'expression

$$-\frac{U_{n-\theta+1} V_{n-\theta+1}}{(s - s_i - \sigma)\, B_\theta B_{\theta-1}}$$

devient

$$-\frac{(s - s_i - \sigma)\, \sigma^{2l_\theta} M'_1 N'_1}{\sigma^{l_\theta + l_{\theta-1}} B'_\theta B'_{\theta-1}} + \ldots,$$

en appelant N'_1 la quantité analogue à M'_1 provenant du calcul de $V_{n-\theta+1}$, et *en négligeant d'écrire les termes qui ne donnent pas de puissances négatives de* σ.

On peut encore écrire

$$-\frac{s - s_i - \sigma}{\sigma^e} \frac{M'_1}{\sqrt{B'_\theta B'_{\theta-1}}} \frac{N'_1}{\sqrt{B'_\theta B'_{\theta-1}}}.$$

Or M'_1 renferme linéairement $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et N'_1 renferme linéairement $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il en sera de même des coefficients de leurs développements par rapport à σ. Soient

$$\frac{M'_1}{\sqrt{B'_0 B'_{0-1}}} = \xi_0 + \xi_1 \sigma + \xi_2 \sigma^2 + \ldots + \xi_m \sigma^m + \ldots,$$

$$\frac{N'_1}{\sqrt{B'_0 B'_{0-1}}} = \eta_0 + \eta_1 \sigma + \eta_1 \sigma^2 + \ldots + \eta_m \sigma^m + \ldots.$$

Le coefficient de $\frac{1}{\sigma}$ que nous cherchons sera donc

$$-(s-s_i)(\xi_0 \eta_{e-1} + \ldots + \xi_{e-1}\eta_0) + (\xi_0 \eta_{e-2} + \ldots + \xi_{e-2}\eta_0).$$

Nous poserons, pour simplifier,

$$\xi_0 \eta_{e-1} + \ldots + \xi_{e-1}\eta_0 = (\xi\eta)_e.$$

Nous voyons ainsi que, étant choisie la racine s_i, les termes successifs du développement de $\frac{F(s_i+\sigma)}{s-s_i-\sigma}$ nous donneront

$$-(s-s_i)(\xi\eta)_{e_0} + (\xi\eta)_{e_0-1},$$
$$-(s-s_i)(\xi\eta)_{e_1} + (\xi\eta)_{e_1-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour une autre racine s'_i nous aurions

$$-(s-s'_i)(\xi\eta)_{e'_0} + (\xi\eta)_{e'_0-1},$$
$$-(s-s'_i)(\xi\eta)_{e'_1} + (\xi\eta)_{e'_1-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Au lieu de réunir tous ces résultats en considérant les diviseurs linéaires $s-s_i$, $s-s'_i$, ..., considérons les diviseurs élémentaires

$$(s-s_1)^{e_1}, \quad (s-s_2)^{e_2}, \quad \ldots, \quad (s-s_\rho)^{e_\rho},$$

et il importe peu que les diviseurs linéaires correspondants soient distincts ou non, nous aurons, en ajoutant tous les résultats obtenus,

$$F = fs + \varphi = -\sum_{i=1}^{i=\rho} [(s-s_i)(\xi\eta)_{e_i} - (\xi\eta)_{e_i-1}].$$

On voit donc que chaque diviseur élémentaire fournit son terme dans le déve-

loppement de F. C'est en cela que consiste l'indépendance des rôles de ces diviseurs élémentaires dans le calcul que nous venons de faire.

13. De la formule précédente on tire

$$(14)\qquad \begin{cases} f = -\Sigma(\xi\eta)_e, \\ \varphi = \quad \Sigma s_i(\xi\eta)_e + \Sigma(\xi\eta)_{e-1}. \end{cases}$$

Il faut remarquer que l'on doit poser

$$(\xi\eta)_{e-1} = 0 \qquad \text{pour} \qquad e = 0.$$

14. Les expressions ξ sont des fonctions linéaires et homogènes de $y_1, \ldots, y_n$ et les expressions η sont des fonctions analogues des $x_1, \ldots, x_n$.

Nous allons montrer qu'on peut réciproquement exprimer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en fonctions linéaires et homogènes des η et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en semblables fonctions des ξ.

En effet, de l'équation

$$f = -\Sigma(\xi\eta)_e,$$

on tire

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi_\mu} &= -\eta_\nu, \\ \frac{\partial f}{\partial \eta_\nu} &= -\xi_\mu, \end{aligned}\right\} \qquad (\mu + \nu = e - 1)$$

et, par conséquent, le déterminant de la forme $\Sigma(\xi\eta)_e$ est égal à

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 1- & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

et n'est pas nul. Appelons δ ce déterminant.

Si l'on fait le changement de variables qui change les ξ en y et les η en x, le déterminant δ sera multiplié par les deux déterminants de substitution que nous appellerons δ_x et δ_y. Mais, quand les variables sont x et y, le déterminant de $\Sigma(\xi\eta)_e$ est celui de f et est supposé différent de zéro. Soit δ_1 ce déterminant, on a la relation

$$\delta_1 = \delta\delta_x\delta_y,$$

d'où l'on conclut que δ_x et δ_y ne peuvent être nuls et, par suite, qu'on peut exprimer les x en η et les y en ξ.

En outre, puisque les déterminants δ_x et δ_y ne sont pas nuls, il y a bien n fonctions ξ et n fonctions η.

45. Les formules (44) ont été données par M. Weierstrass. L'éminent analyste leur a donné encore une autre forme plus symétrique que la précédente et que nous allons indiquer.

Soient g, h, g', h' quatre nombres, entiers si l'on veut, tels que le déterminant $gh' - hg'$ soit égal à l'unité, et posons

$$\begin{aligned} f &= -(gP + hQ), \\ \varphi &= \quad g'P + h'Q, \\ F = -(fs + \varphi) &= [(gP + hQ)s - (g'P + h'Q)]. \end{aligned}$$

Nous tirerons de là

$$F = (gs - g')P + (hs - h')Q = pP + qQ,$$

en posant

$$\begin{aligned} gs - g' &= p, \\ hs - h' &= q. \end{aligned}$$

Nous aurons, en outre,

$$ap + bq = (ag + bh)s - (ag' + bh').$$

Supposons que $ap + bp$ soit un diviseur du déterminant $[P, Q]$ et remplaçons a et b par des valeurs proportionnelles, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} ag + bh &= 1, \\ ag' + bh' &= s_i, \end{aligned}$$

nous aurons

$$ap + bq = s - s_i.$$

Il résulte de là que les diviseurs élémentaires du déterminant de la forme $F = pP + qQ$ correspondront aux diviseurs de la forme $F = -(fs + \varphi)$. Si l'on résout alors le système d'équations

$$\begin{aligned} ag + bh &= 1, \\ ag' + bh &= s_i, \end{aligned}$$

on aura, en introduisant un indice pour a et b,

$$a_i = h' - hs_i, \qquad b_i = -g' + gs_i.$$

Enfin les équations

$$\begin{aligned} gP + hQ &= -f, \\ g'P + h'Q &= \varphi \end{aligned}$$

donneront

$$P = -h'f - h\varphi = \sum (a_i + hs_i)(\xi\eta)_{e_i} - h\sum s_i(\xi\eta)_{e_i} - h\sum(\xi\eta)_{e_i-1},$$
$$Q = \quad g'f + g\varphi = \sum (b_i - gs_i)(\xi\eta)_{e_i} + g\sum s_i(\xi\eta)_{e_i} + g\sum(\xi\eta)_{e_i-1},$$

ou enfin

$$(45)\qquad \begin{cases} P = \sum_i [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}], \\ Q = \sum_i [b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i-1}]. \end{cases}$$

46. On voit donc que, *si* P *et* Q *sont deux formes bilinéaires telles que le déterminant* [P, Q] *ne soit pas identiquement nul, si g et h sont deux constantes quelconques, telles que le déterminant de la forme* $gP + hQ$ *ne soit pas nul, et enfin si* $(a_ip + b_iq)^{e_i}$ *est un diviseur élémentaire quelconque du déterminant* [P, Q], *on pourra poser les formules* (45).

47. Le coefficient de s^n dans [P, Q] est la valeur de [P, Q] pour $p = g$, $q = h$; en le représentant par $[g, h]$, nous aurons

$$[P, Q] = [g, h]\prod_i (a_ip + b_iq)^{e_i} = [g, h]\prod_i (s - s_i)^{e_i}.$$

48. A un exposant e_i correspond dans P un nombre e_i de termes multipliés par a_i et un nombre $e_i - 1$ de termes multipliés par h. Donc à un exposant e_i correspondent $2e_i - 1$ termes dans P, et de même $2e_i - 1$ termes dans Q, lorsqu'on donne à P et à Q les formes (45) qu'on peut appeler *canoniques*.

Si l'on a $e_i = 1$, le nombre des termes dans P ou Q se réduit à l'unité.

Si tous les nombres e_i se réduisent à l'unité, on aura le cas le plus simple des formules (45) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} P &= \Sigma a_i\xi_i\eta_i, \\ Q &= \Sigma b_i\xi_i\eta_i, \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans tous les cas, on pourra un peu simplifier les formules (44) en posant

$$g = 1, \qquad h = 0, \qquad g' = 0, \qquad h' = 1$$

si [P] n'est pas nul, et

$$g = 0, \qquad h = -1, \qquad g' = 1, \qquad h' = 0$$

si [Q] n'est pas nul.

49. *En résumé, étant données deux formes bilinéaires* P *et* Q, *si le déter-*

minant de la forme $pP + qQ$ *a* ρ *diviseurs élémentaires*

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad \ldots, \quad (a_\rho p + b_\rho q)^{e_\rho},$$

et il importe peu que les binomes $(a_1 p + b_1 q), \ldots, (a_\rho p + b_\rho q)$ *soient distincts ou non, on peut déterminer* n *fonctions linéaires et homogènes des* y, *soient*

$$\xi_0^i, \quad \xi_1^i, \quad \ldots, \quad \xi_{e_i-1}^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

et n *fonctions linéaires et homogènes des* x, *soient*

$$\eta_0^i, \quad \eta_1^i, \quad \ldots, \quad \eta_{e_i-1}^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

telles que, pour des valeurs données des constantes g *et* h *et pour des valeurs convenables des rapports* $\frac{a_i}{b_i}$, *on puisse construire les nouvelles formes*

$$P = \sum_i [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

$$Q = \sum_i [b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

et, réciproquement, on pourra exprimer les x *et les* y *au moyen des* ξ *et des* η *de manière à reproduire les formes primitives.*

50. Soient maintenant deux couples de formes bilinéaires

$$P(x|y), \qquad Q(x|y)$$

et

$$P'(x'|y'), \qquad Q'(x'|y'),$$

et supposons que les deux déterminants $[P, Q]$ et $[P', Q']$ aient les mêmes diviseurs élémentaires.

Nous déterminerons, d'une part, n fonctions linéaires et homogènes de y_1, $y_2, \ldots, y_n$, soient ξ_μ^i $(i = 1, 2, \ldots, \rho;\ \mu = 0, 1, \ldots, e_i - 1)$, et n fonctions linéaires et homogènes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soient η_ν^i

$$(i = 1, 2, \ldots, \rho; \qquad \nu = 0, 1, \ldots, e_i - 1);$$

et, d'autre part, n fonctions semblables $\xi_\mu'^i$ de $y_1', \ldots, y_n'$ et n fonctions semblables $\eta_\nu'^i$ de $x_1', \ldots, x_n'$, telles que l'on puisse mettre P, Q, P', Q' en employant les mêmes valeurs de g, h, a, b sous les formes

$$P = \sum_i [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

$$Q = \sum_i [b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

$$P' = \sum [a_i(\xi'\eta')_{e_i} - h(\xi'\eta')_{e_i-1}],$$

$$Q' = \sum [b_i(\xi'\eta')_{e_i} + g(\xi'\eta')_{e_i-1}].$$

Il est évident que P et P′, Q et Q′ ne différeront que par la notation et se transformeront les unes dans les autres quand on posera

$$\xi' = \xi, \qquad \eta' = \eta.$$

Mais ces équations sont des relations entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ d'une part, et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ d'autre part. On a vu qu'on peut les résoudre soit par rapport aux x et aux y, soit par rapport aux x' et aux y'. En outre, les formes P, Q, P′, Q′, une fois qu'on a choisi g et h, ne dépendent que des diviseurs élémentaires de [P, Q] et de [P′, Q′]. On a donc ce théorème, qui est la conclusion de tous ceux qui précèdent :

Pour que deux formes bilinéaires P *et* Q *se changent simultanément en deux autres* P′ *et* Q′ *au moyen de substitutions convenables des x' aux x et des y' aux y, il faut et il suffit que les déterminants des deux formes*

$$p\mathrm{P} + q\mathrm{Q} \qquad \text{et} \qquad p\mathrm{P}' + q\mathrm{Q}'$$

aient les mêmes diviseurs élémentaires.

51. Pour appliquer le théorème général précédent, il n'est pas nécessaire de décomposer effectivement les deux déterminants [P, Q], [P′, Q′] en diviseurs élémentaires.

Si l'on considère les formes $fs + \varphi$, $fs' + \varphi'$, on déterminera, pour chaque ordre de mineurs, les plus grands communs diviseurs de ces mineurs. En leur supposant un coefficient égal à l'unité, et en les appelant

$$\begin{gathered} \mathrm{R}_0(s), \quad \mathrm{R}_1(s), \quad \mathrm{R}_2(s), \quad \ldots, \\ \mathrm{R}'_0(s), \quad \mathrm{R}'_1(s), \quad \mathrm{R}'_2(s), \quad \ldots, \end{gathered}$$

l'indice o correspondant au déterminant principal et l'indice k aux mineurs d'ordre k, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait identiquement

$$\mathrm{R}_k(s) = \mathrm{R}'_k(s) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

52. Il sera encore utile pour la suite de démontrer directement que les formes (45)

$$\mathrm{P} = \sum [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

$$\mathrm{Q} = \sum [b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

obtenues précédemment, et où l'on a

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_\rho = n,$$
$$g a_i + h b_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

admettent bien les diviseurs élémentaires $(a_i p + b_i q)^{e_i}$.

53. Posons

$$\mathrm{P}_i = a_i (\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i - 1},$$
$$\mathrm{Q}_i = b_i (\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i - 1},$$

nous aurons

$$p\mathrm{P}_i + q\mathrm{Q}_i = (a_i p + b_i q)(\xi\eta)_{e_i} + (gq - hp)(\xi\eta)_{e_i - 1}.$$

Soient alors

$$a_i p + b_i q = u_i, \qquad gq - hp = v;$$

u_i et v sont deux variables indépendantes avec p et q puisque le déterminant $g a_i + h b_i$ n'est pas nul.

Par suite, le déterminant de la forme $p\mathrm{P}_i + q\mathrm{Q}_i$ peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & v & u_i \\ 0 & 0 & \ldots & v & u_i & 0 \\ . & . & \ldots & . & . & . \\ 0 & v & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ v & u_i & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ u_i & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si nous cherchons de même le déterminant de la forme $p\mathrm{P} + q\mathrm{Q}$, en posant

$$\mathrm{P} = \sum_i \mathrm{P}_i, \qquad \mathrm{Q} = \sum_i \mathrm{Q}_i, \qquad a_i p + b_i q = u_i,$$

nous trouverons

$$(46) \qquad [\mathrm{P}, \mathrm{Q}] = \left|\begin{array}{ccccc|ccccc|c} 0 & 0 & \ldots & v & u_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ .. & .. & \ldots & .. & .. & .. & .. & \ldots & .. & .. & \ldots \\ v & u_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ u_1 & 0 & \ldots & . & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & v & u_2 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & u_2 & 0 & \ldots \\ .. & .. & \ldots & .. & .. & . & . & \ldots & .. & . & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & v & u_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & u_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \hline .. & .. & \ldots & .. & .. & .. & .. & \ldots & .. & .. & \ldots \end{array}\right|$$

et nous en conclurons que l'on doit avoir

$$[P, Q] = \prod [P_i, Q_i].$$

Or, on a évidemment $[P_i, Q_i] = \pm u^{e_i}$, et u^{e_i} sera le seul diviseur élémentaire de $[P_i, Q_i]$, car, si l'on efface la dernière ligne et la dernière colonne de ce déterminant, on a un mineur du premier ordre égal à $\pm v^{e_i - 1}$. Mais v est indépendant de u_i, et v^{e_i-1} ne peut être divisé par u_i.

Si l'on a $e_i = 1$, u_i est évidemment le seul diviseur élémentaire de $[P_i, Q_i]$ qui se réduit dans ce cas particulier à un seul terme, le terme u_i.

On aura ensuite

$$[P, Q] = \pm u_1^{e_1} u_2^{e_2} \ldots u_\rho^{e_\rho} = \prod_i (a_i p + b_i q)^{e_i}.$$

On en conclut que les diviseurs élémentaires de $[P, Q]$ ne pourront être que les puissances des diviseurs linéaires $a_i p + b_i q$. Il reste à déterminer leurs exposants.

54. Cherchons les déterminants d'ordre ϖ de $[P, Q]$. Chacun d'eux répond à une suppression de ϖ lignes et ϖ colonnes dans le déterminant principal. Si l'on observe la forme de $[P, Q]$, on reconnaît qu'il est composé de déterminants partiels ayant en commun la diagonale principale avec $[P, Q]$ lui-même. C'est ce que l'on a indiqué par des barres sur la figure (46) de ce déterminant $[P, Q]$.

Supposons que l'on supprime ϖ lignes et ϖ colonnes, et, pour fixer les idées, supposons que les k premières lignes et les k' premières colonnes du mineur obtenu renferment les éléments non nuls qui restent après cette suppression dans le premier déterminant partiel $[P_i, Q_i]$, k étant $\gtrless k'$, $k' > k$ par exemple.

Dans un terme quelconque du développement du mineur de $[P, Q]$ entreront nécessairement un élément non nul de la première ligne, un élément non nul de la deuxième, etc., et ces éléments ne pourront appartenir qu'aux k' premières colonnes, les autres colonnes ne pouvant fournir que des éléments nuls dans les lignes considérées. Mais il restera encore $k' - k$ des premières colonnes dans lesquelles il faudra prendre un élément en dehors des k premières lignes. Cet élément sera nul. Nous concluons de là que les seuls mineurs de $[P, Q]$ qui ne sont pas nuls ont la diagonale principale commune avec $[P, Q]$ lui-même.

Étant autorisés à ne considérer que les mineurs de $[P, Q]$ qui ont la même diagonale principale que ce déterminant, représentons par $[P_i, Q_i]^{(m_i)}$ l'un des mineurs d'ordre m du déterminant $[P_i, Q_i]$ ou ce déterminant lui-même si $m = 0$.

Tous les mineurs non nuls d'ordre ϖ de $[P, Q]$ pourront être mis sous la forme

$$\prod_i [P_i, Q_i]^{(m_i)},$$

où l'on suppose

$$\sum_i m_i = \varpi.$$

55. Cela posé, soit $ap + bq$ un quelconque des diviseurs linéaires de $[P, Q]$, et soient, tirés de ceux des déterminants $[P_i, Q_i]$ divisibles par $ap + bq$, les diviseurs $(ap + bq)^{e_0}$, $(ap + bq)^{e_1}$, ..., $(ap + bq)^{e_r}$ qui représentent tous les diviseurs élémentaires correspondants de ces déterminants.

Nous supposerons que les nombres $e_0, e_1, \ldots, e_r$ n'aillent pas en croissant.

Si nous prenons $m_i = 1$, pour les valeurs $0, 1, \ldots, r$ de l'indice i, et que nous prenions précisément le mineur de $[P_i, Q_i]$ obtenu en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, le mineur de $[P, Q]$ qu'on formera ainsi en supprimant dans $[P, Q]$ au moins $r+1$ lignes et $r+1$ colonnes ne pourra pas être divisé par $ap + bq$. Donc les mineurs de $[P, Q]$ d'ordre égal ou supérieur à $r+1$ n'admettent pas en commun le diviseur linéaire $ap + bq$, et, par suite, il n'y a pas plus de $r+1$ diviseurs élémentaires fournis par le diviseur linéaire $ap + bq$.

Cherchons maintenant l'exposant du diviseur $ap + bq$ dans les mineurs d'ordre ϖ inférieur à $r+1$. Soit ρ le nombre total des déterminants $[P_i, Q_i]$, on a

$$\rho - \varpi = (\rho - r - 1) + (r - \varpi + 1).$$

Puisqu'il n'y a pas plus de ϖ nombres $m_0, m_1, \ldots, m_\rho$ qui ne soient pas nuls, il y en a au moins $\rho - \varpi$ ou encore

$$(\rho - r - 1) + (r - \varpi + 1)$$

qui le sont.

On pourra bien prendre nuls les $\rho - r - 1$ nombres m qui ne correspondent pas aux indices $0, 1, \ldots, r$; mais parmi ces derniers il faudra en prendre au moins $r - \varpi + 1$ qui soient nuls.

Donc, dans le produit

$$\Pi [P_i, Q_i]^{(m_i)}$$

apparaîtront au moins $r - \varpi + 1$ des déterminants $[P_i, Q_i]$ où i est égal à $0, 1, \ldots, r$. Par suite, chaque mineur de l'ordre ϖ de $[P, Q]$ sera divisible par une puissance de $(ap + bq)$ dont l'exposant sera la somme de $r - \varpi + 1$ des nombres $e_0, e_1, \ldots, e_r$. Cet exposant ne sera pas plus petit que la somme

$$e_\varpi + e_{\varpi+1} + \ldots + e_r.$$

D'ailleurs, si l'on égale à l'unité les nombres m_i auxquels correspondent les exposants $e_0, e_1, \ldots, e_{\varpi-1}$ et à zéro les autres nombres m_i, on peut former un mineur de [P, Q] qui admette $ap+bq$ comme diviseur exactement au degré $e_\varpi + e_{\varpi+1} + \ldots + e_r$ et qui soit d'ordre ϖ. On en conclut que $(ap+bq)^{e_\varpi+\ldots+e_r}$ est la plus haute puissance de $ap+bq$ qui divise à la fois tous les mineurs d'ordre ϖ de [P, Q].

Posons alors

$$\begin{aligned} l_0 &= e_0 + e_1 + \ldots + e_\varpi + \ldots + e_r, \\ l_0 - e_0 = l_1 &= e_1 + \ldots + e_\varpi + \ldots + e_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_{\varpi-1} - e_{\varpi-1} = l_\varpi &= e_\varpi + \ldots + e_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_{r-1} - e_{r-1} &= e_r, \end{aligned}$$

ou encore

$$l_0 - l_1 = e_0, \quad l_1 - l_2 = e_2, \quad \ldots, \quad l_{r-1} - l_r = e_r, \quad l_r = e_r,$$

$l_0, l_1, \ldots, l_r$ seront les plus hauts exposants des puissances de $ap+bq$ respectivement dans le déterminant principal, dans ses mineurs du premier ordre, etc., dans ses mineurs de l'ordre r. Si l'on se reporte aux définitions posées au début du Chapitre, on voit que

$$(ap+bq)^{e_0}, \quad \ldots, \quad (ap+bq)^{e_r}$$

sont les diviseurs élémentaires de [P, Q] qui correspondent au diviseur linéaire $ap+bq$.

Les nombres e ne vont pas en croissant : c'est une condition à ajouter à celles qu'on a trouvées dans les définitions du début.

56. Puisque les formes canoniques de deux formes bilinéaires P et Q ne dépendent que des diviseurs élémentaires du déterminant [P, Q] et de deux constantes arbitraires g et h, on en conclut que si on laisse arbitraires g et h, et si l'on fait *une double substitution générale dans des formes canoniques construites* a priori, *on obtiendra les formes bilinéaires les plus générales correspondant aux diviseurs élémentaires que l'on a choisis.*

57. Dans le cas où le déterminant [P, Q] a n diviseurs élémentaires, plusieurs pouvant provenir de diviseurs linéaires égaux entre eux, les exposants $e_0, e_1, \ldots, e_r$ sont tous égaux à l'unité. Les formes canoniques deviennent simplement

$$\begin{aligned} P &= a_1 \xi_1 \eta_1 + \ldots + a_n \xi_n \eta_n, \\ Q &= b_1 \xi_1 \eta_1 + \ldots + b_n \xi_n \eta_n. \end{aligned}$$

Réciproquement, le déterminant de la forme

$$pP + qQ = \sum_i (a_i p + b_i q)\xi_i \eta_i$$

admet les diviseurs élémentaires

$$a_1 p + b_1 q, \quad \ldots, \quad a_n p + b_n q.$$

Il faut donc, pour que P et Q puissent prendre les formes précédentes, que le déterminant [P, Q] possède n diviseurs élémentaires. Mais [P, Q] renferme chacun de ces diviseurs à la première puissance; tous les exposants e sont égaux à l'unité, et, pour un même diviseur linéaire de [P, Q], on a

$$\begin{aligned} l_0 - l_1 &= 1, \\ l_1 - l_2 &= 1, \\ \ldots&\ldots, \\ l_r &= 1. \end{aligned}$$

En conséquence, un même diviseur linéaire du degré l_0 de multiplicité fournit l_0 diviseurs élémentaires dont les exposants e sont égaux à l'unité, et ce diviseur linéaire est commun à tous les mineurs d'ordre $l_0 - 1$. On a donc ce théorème :

Pour que les formes P *et* Q *puissent s'écrire*

$$P = \sum_i a_i \xi_i \eta_i, \qquad Q = \sum_i b_i \xi_i \eta_i,$$

ξ_i *et* η_i *étant respectivement des formes linéaires et homogènes des* y *et des* x, *il faut et il suffit que tout diviseur de* [P, Q] *qui entre comme diviseur linéaire au degré* $l_0 > 1$ *soit en même temps un diviseur commun de tous les mineurs de l'ordre* $l_0 - 1$ *de* [P, Q].

58. Considérons enfin les deux formes bilinéaires

$$P = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \tag{47}$$

$$P' = x'_1 y'_1 + \ldots + x'_n y'_n, \tag{48}$$

et supposons que l'on veuille par une double substitution linéaire passer de P à P' on posera

$$y'_i = c_{i1} y_1 + \ldots + c_{in} y_n, \tag{49}$$

et l'on en déduira

$$\sum x'_i y'_i = \sum x'_i c_{ij} y_j = \sum x'_j c_{ji} y_i = \sum x_i y_j,$$

d'où

$$x_i = c_{1i}x'_1 + \ldots + c_{ni}x'_n. \tag{50}$$

Il est évident que l'on peut remplacer les y et les y' par des fonctions quelconques, pourvu que l'on respecte les équations (49) ou, ce qui revient au même, les équations (50), ces deux sortes de relations s'entraînant l'une l'autre quand on pose $P = P'$.

Remplaçons en particulier les y par des combinaisons linéaires d'eux-mêmes, soit par exemple y_i par

$$a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,$$

de sorte que P deviendra la forme bilinéaire générale

$$Q = \Sigma a_{ij}x_i y_j.$$

Remplaçons de même les y' par des combinaisons analogues, soit y'_i par

$$a'_{i1}y'_1 + \ldots + a'_{in}y'_n,$$

de sorte que P' deviendra la forme bilinéaire générale

$$Q' = \Sigma a'_{ij}x'_i y'_j;$$

on suppose que les relations (50) sont conservées. On devra donc avoir

$$\Sigma a'_{ij}y'_j = c_{i1}(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n) + \ldots + c_{in}(a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n). \tag{51}$$

Peut-on satisfaire à ces relations (51) tout en conservant les relations (49)? Il faudra que l'on ait

$$\begin{aligned} a'_{i1}(c_{11}y_1 + \ldots + c_{1n}y_n) + \ldots + a'_{in}(c_{n1}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n) \\ = c_{i1}(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n) + \ldots + c_{in}(a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n) \end{aligned} \tag{52}$$

ou encore

$$a'_{i1}c_{1j} + \ldots + a'_{in}c_{nj} = c_{i1}a_{1j} + \ldots + c_{in}a_{nj} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{53}$$

Réciproquement, si ces relations sont satisfaites, on aura identiquement les relations (52) et, à cause des relations (51), on aura

$$a'_{i1}(c_{11}y_1 + \ldots + c_{1n}y_n) + \ldots + a'_{in}(c_{n1}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n) = a'_{i1}y'_1 + \ldots + a'_{in}y'_n. \tag{54}$$

Or, le déterminant des c n'étant pas nul et celui des a n'étant pas nul non plus, on remarquera que les relations (53) expriment que le produit du détermi-

nant des a' par le déterminant des c est égal au produit du déterminant des c par celui des a. Donc le déterminant des a' n'est pas nul, et les relations (54) entraînent les relations

$$y'_i = c_{i1} y_1 + \ldots + c_{in} y_n. \tag{49}$$

Par suite, pour qu'une même substitution double

$$\left\{ \begin{aligned} y'_i &= c_{i1} y_1 + \ldots + c_{in} y_n, \\ x_i &= c_{1i} x'_1 + \ldots + c_{ni} x'_n \end{aligned} \right. \tag{55}$$

ramène à la fois P à P′ et Q à Q′, il faut et il suffit que les relations (53) existent.

Mais alors les déterminants des deux formes $Q - \omega P$ et $Q' - \omega P'$ auront mêmes diviseurs élémentaires, et réciproquement si $Q - \omega P$, $Q' - \omega P'$ ont mêmes diviseurs élémentaires, on pourra calculer les relations (55), qui auront bien la forme indiquée à cause de la forme spéciale donnée à P et à P′.

En résumé, *si l'on a les relations* (53), *les deux déterminants*

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11} - \omega & \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \omega \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad R'(\omega) = \begin{vmatrix} a'_{11} - \omega & \ldots & a'_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n1} & \ldots & a'_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

ont mêmes diviseurs élémentaires, et réciproquement, si ce fait a lieu, on a les relations (55) *et, par suite, les relations* (53).

Nous aurons à appliquer ce théorème final dans la théorie des équations différentielles.

CHAPITRE III.

DES POINTS SINGULIERS.

59. On peut faire remonter l'étude des points singuliers au célèbre Mémoire de Puiseux sur les points algébriques; mais le travail fondamental, relativement aux points singuliers des intégrales des équations linéaires, est celui de M. Fuchs.

60. Nous avons supposé dans le Chapitre premier que la variable x décrivait, dans le plan des x, un chemin quelconque partant d'un point initial x_0 et conduisant à un point terminus quelconque, ce chemin étant assujetti à la condition de ne passer par aucun point singulier des coefficients des équations différentielles linéaires (n°s 2 et suivants). Nous considérerons maintenant le cas, plus spécial, où le point terminus se confond avec le point de départ. La variable décrira donc un chemin fermé. Les éléments des solutions du système

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = \Sigma a_{ij} y_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

auront pris des valeurs nouvelles. Nous déterminerons l'influence que peut avoir sur ces valeurs un point singulier entouré par le chemin fermé décrit par la variable x.

61. Nous supposons toujours que, dans une région T du plan, les fonctions a_{ij} qui entrent dans les équations (A) soient uniformes et continues, sauf en certains points que nous appelons *singuliers*. Quel que soit le chemin fermé suivi par la variable x, les coefficients a_{ij} reprendront au même point du plan la même valeur. Ces fonctions sont d'ailleurs *régulières* en chaque point non singulier, c'est-à-dire sont développables dans un domaine convenable de chaque point $x = a$, en séries convergentes de la forme

$$\Sigma A_r (x - a)^r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les éléments d'une solution. Nous appellerons $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les nouvelles valeurs de ces éléments, quand la variable ayant décrit un chemin fermé recommence à le parcourir.

Cela posé, le théorème fondamental est le suivant :

Si la variable indépendante revient à sa valeur initiale, les nouvelles va-

leurs Y_{ij} *des éléments d'un système fondamental de solutions sont liées aux anciennes* y_{ij} *par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme*

$$(56) \qquad Y_{ij} = C_{j1} y_{i1} + \ldots + C_{jn} y_{in} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

En effet, si l'on considère les fonctions qui dans le mouvement de la variable x partent d'abord des valeurs Y_{ij}, on sait qu'on peut les exprimer linéairement au moyen des fonctions y_{ij}, ce qui démontre le théorème précédent.

On remarquera que le déterminant des constantes C est différent de zéro ; car les fonctions Y_{ij} forment un système fondamental puisqu'elles continuent les fonctions y_{ij}, et il faut qu'on puisse exprimer les fonctions y_{ij} au moyen des fonctions Y_{ij}.

62. Supposons que le chemin fermé décrit par la variable n'entoure aucun point singulier. Nous allons montrer que les fonctions y_{ij} sont uniformes et que, par suite, les relations (56) se réduisent à la forme

$$Y_{ij} = y_{ij}.$$

Il existe un domaine du point de départ x_0 où les fonctions a sont régulières. Sans sortir de ce domaine, allons à un point x_1. Il existe, dans le domaine considéré, n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfaisant aux équations (A), et qui ont au point x_0 des valeurs arbitraires $\eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}$. Quand la variable x sera parvenue en x_1, les fonctions y auront des valeurs bien déterminées $\eta_{11}, \ldots, \eta_{n1}$. Le point x_1 n'est pas un point singulier des coefficients a. Il existe pour ce point un domaine dans lequel la variable x pourra passer du point x_1 à un point x_2 et les fonctions y passeront des valeurs $\eta_{11}, \ldots \eta_{n1}$ aux valeurs déterminées $\eta_{12}, \ldots, \eta_{n2}$.

En avançant ainsi de proche en proche, on arrivera à un point terminus quelconque. Nous supposons dans ce Chapitre que nous revenons au point x_0 lui-même.

Cela posé, remarquons que les domaines successifs sont formés de cercles qui empiètent les uns sur les autres. Prenons arbitrairement un point x'_1 dans la région commune aux domaines des deux points x_0 et x_1 ; puis prenons un point x'_2 dans la région commune aux domaines des deux points x_1 et x_2, etc.

Joignons le point x_0 au point x'_1 par un chemin quelconque tracé dans le domaine du point x_0, puis le point x'_1 au point x'_2 par un chemin quelconque tracé dans le domaine du point x_1, etc.

Nous pourrons substituer le chemin $x_0 x'_1 x'_2 \ldots$ au chemin $x_0 x_1 x_2 \ldots$.

En effet, on peut évidemment substituer au chemin nouveau le chemin obtenu

en allant du point x_0 au point x'_1, du point x'_1 au point x_1 dans la partie commune à deux domaines, du point x_1 au point x'_1 par le même chemin, du point x'_1 au point x'_2, du point x'_2 au point x_2 et du point x_2 au point x'_2 sans sortir de la partie commune à deux domaines, etc.; or le chemin direct $x_0 x_1$ et le chemin $x_0 x'_1 x_1$ conduisent aux mêmes valeurs $\eta_{11}, \ldots, \eta_{n1}$, car on n'est pas sorti du domaine du point x_0; le chemin $x_1 x'_1 x'_2 x_2$ et le chemin direct $x_1 x_2$ sont de même équivalents, etc. Il est en outre évident que le chemin $x'_1 x_1$ par exemple, étant décrit successivement dans les deux sens, ne change pas la valeur de la fonction et peut être supprimé.

Il résulte de là que, connaissant les valeurs initiales des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ au point x_0, on peut revenir à ce point x_0 par deux chemins fermés voisins différents sans changer les valeurs initiales des fonctions Y.

Mais alors, si le chemin fermé décrit par la variable x peut être déformé dans la région T d'une manière continue en ne rencontrant pas de points singuliers, on pourra le réduire au point x_0 lui-même. C'est ce qu'expriment les relations

$$Y_{ij} = y_{ij}.$$

En résumé, les éléments des solutions du système (A) *sont des fonctions uniformes dans toute région qui ne renferme pas de points singuliers des coefficients a.*

63. *Les relations* (56) *sont caractéristiques des solutions des systèmes* (A) *d'équations différentielles linéaires et homogènes.*

Soit, en effet, D le déterminant, supposé différent de zéro, de n^2 fonctions y_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ d'une variable indépendante x, *régulières* en tous les points x, sauf en des *points singuliers,* lorsque la variable reste dans une région T du plan. Supposons que cette variable x décrive un chemin fermé ne passant par aucun point singulier et revienne à sa valeur initiale. Si les n^2 fonctions prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants, telles que les relations (56), ces fonctions forment un système fondamental de solutions d'équations de la forme (A), dont les coefficients a sont uniformes, et n'ont pas d'autres *points singuliers* que les *points singuliers* des fonctions.

Nous démontrerons cette proposition en formant un système d'équations tel que (A), auquel satisfassent les n solutions

$$y_{1j}, \quad y_{2j}, \quad \ldots, \quad y_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous aurons, en général, les relations

$$\frac{dy_{ij}}{dx} = a_{i1} y_{1j} + \ldots + a_{in} y_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

et nous en tirerons

$$\mathrm{D}a_{ip} = \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & \frac{dy_{i1}}{dx} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1n} & \cdots & \frac{dy_{in}}{dx} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que nous pourrons calculer les coefficients a.

Ces coefficients sont exprimés par le rapport de deux déterminants. Le dénominateur du rapport est toujours D; le numérateur est le résultat obtenu en remplaçant dans D les éléments d'une colonne par les dérivées des fonctions y_{ij}. Les éléments des deux déterminants prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme (56), quand la variable x a décrit son chemin fermé. Les constantes sont les mêmes pour les éléments homologues des deux déterminants qui forment le rapport. Les deux termes du rapport sont donc multipliés par le même déterminant des constantes. Donc le rapport ne change pas et les fonctions a sont des fonctions uniformes.

Il résulte du calcul des coefficients a qu'ils ne peuvent avoir d'autres points singuliers que ceux des fonctions y_{ij} elles-mêmes.

Enfin, le déterminant D étant différent de zéro, les fonctions y_{ij} forment un système fondamental de solutions du système d'équations différentielles

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n.$$

64. Prenons l'exemple donné par M. Tannery.

Soit $f(y, x) = 0$ une équation algébrique rationnelle, entière et de degré n en y. Cette équation définit n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui sont régulières en tous les points du plan, sauf en des points *singuliers algébriques*. Si la variable décrit son chemin fermé, ces n fonctions prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations telles que les relations (56) et même de la forme la plus simple. En effet, en un point x, l'une de ces fonctions doit rester la même, ou être remplacée par l'une des autres, après que la variable a fait le tour du point x. Cela résulte de ce que l'équation algébrique ne peut fournir que n fonctions y différentes.

Les dérivées successives des fonctions y seront des fonctions satisfaisant aux mêmes relations que ces fonctions elles-mêmes. Nous considérerons comme inconnues auxiliaires ces dérivées jusqu'à celles de l'ordre $n - 1$ inclusivement.

Déterminons y par la relation algébrique

$$f(y, x) = 0$$

du degré n en y. Les n^2 fonctions inconnues que déterminera cette équation satisfont à un système différentiel tel que (A), *lorsque leur déterminant n'est pas nul,* c'est-à-dire quand elles sont *linéairement* indépendantes. Dans le cas contraire, le système différentiel renferme moins de n inconnues.

65. Faisons le calcul.

On peut trouver deux polynomes A et B, tels que l'expression

$$\varphi = \mathrm{A}f + \mathrm{B}\frac{\partial f}{\partial y}$$

soit indépendante de y. A et B seront deux polynomes entiers et rationnels en y et x et de degrés respectifs au plus $n-2$ et $n-1$ par rapport à y. Or on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0;$$

on aura donc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mathrm{B}\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\mathrm{B}\dfrac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{\mathrm{B}\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\varphi},$$

si y satisfait à l'équation

$$f(y, x) = 0.$$

Au moyen de l'équation $f(y, x) = 0$, on peut réduire les puissances de y au plus à l'exposant $n-1$ et l'on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{P}_1}{\varphi},$$

$\frac{\mathrm{P}_1}{\varphi}$ étant une fonction rationnelle en x et un polynome en y au plus de degré $n-1$.

On aura ensuite

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{P}_1}{\varphi}\right) = \frac{\mathrm{P}_2}{\varphi^2},$$

$\frac{\mathrm{P}_2}{\varphi^2}$ étant une expression de même nature que $\frac{\mathrm{P}_1}{\varphi}$.

En continuant ainsi, on pourra poser, en appelant y_1 une solution quelconque de l'équation algébrique,

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= \frac{\mathrm{P}_1}{\varphi} = \mathrm{A}_0^2 + \mathrm{A}_1^2 y_1 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}^2 y_1^{n-1},\\
\frac{d^2y_1}{dx^2} &= \frac{\mathrm{P}_2}{\varphi^2} = \mathrm{A}_0^3 + \mathrm{A}_1^3 y_1 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}^3 y_1^{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} &= \frac{\mathrm{P}_{n-1}}{\varphi^{n-1}} = \mathrm{A}_0^n + \mathrm{A}_1^n y_1 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}^n y_1^{n-1},\\
\frac{d^ny_1}{dx^n} &= \frac{\mathrm{P}_n}{\varphi^n} = \mathrm{A}_0^{n+1} + \mathrm{A}_1^{n+1} y_1 + \ldots + \mathrm{A}_n^{n+1} y_1^{n-1}.
\end{aligned}$$

Entre ces n équations on peut éliminer les $n-1$ puissances $y_1^0, y_1^2, \ldots, y_1^{n-1}$, et il restera une relation qui, développée, se présentera sous la forme

$$U_0 \frac{d^n y_1}{dx^n} + U_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + U_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + U_n y_1 = 0,$$

ou, comme l'on sait, sous la forme équivalente

$$U_0 \frac{dy_n}{dx} + U_1 y_n + \ldots + U_{n-1} y_2 + U_n y_1 = 0,$$

$$\frac{dy_k}{dx} = y_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

On obtient ainsi le résultat demandé. On remarquera que tous les coefficients U sont uniformes comme fractions rationnelles de x. De plus, les points singuliers ne peuvent provenir que des équations $\varphi = 0$ ou $U_0 = 0$, ou de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le coefficient de y^n dans $f(y, x) = 0$.

Le seul cas qui prête à discussion est celui où l'on a

$$U_0 = 0,$$

ou encore

$$U_0 = \begin{vmatrix} A_0^2 & A_2^2 & \ldots & A_{n-1}^2 \\ A_0^3 & A_2^3 & \ldots & A_{n-1}^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_0^n & A_2^n & \ldots & A_{n-1}^n \end{vmatrix} = 0.$$

Or, considérons le déterminant D, on a

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \ldots & \frac{dy_n}{dx} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \ldots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots \\ A_0^2 + A_1^2 y_1 + \ldots + A_{n-1}^2 y_1^{n-1} & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ A_0^n + A_1^n y_1 + \ldots + A_{n-1}^n y_1^{n-1} & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & \ldots & y_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & y_n & \ldots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ A_0^2 & A_1^2 & A_2^2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_0^n & A_1^n & A_2^n & \ldots \end{vmatrix}.$$

Le premier facteur est le produit des différences deux à deux des quantités $y_1 - y_n$.

Le second facteur est la quantité U_0 elle-même.

On voit par là que si les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont linéairement indépen-

dantes, l'équation $U_0 = 0$ ne peut être satisfaite que par les points singuliers, c'est-à-dire par les valeurs de x qui annulent D exceptionnellement.

Dans le cas où l'on a identiquement $U_0 = 0$, les n fonctions y étant supposées distinctes, on aura $D = 0$, c'est-à-dire que ces fonctions, quoique distinctes, ne sont pas linéairement indépendantes.

Dans ce cas, l'équation différentielle

$$U_0 \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots = 0$$

s'abaisse à un ordre moindre, ou, ce qui revient au même, le système différentiel équivalent peut être ramené à renfermer moins de n équations différentielles.

66. Revenons aux relations (56) qui relient entre elles les valeurs nouvelles et les valeurs anciennes des éléments d'un système fondamental de solutions.

Considérons à la fois deux systèmes fondamentaux de solutions dont nous représenterons par y_{ij} et η_{ij} les éléments. Soient Y_{ij} et H_{ij} leurs nouvelles valeurs. Nous devrons avoir les deux systèmes de relations à coefficients constants

$$Y_{ij} = l_{j1} y_{i1} + \ldots + l_{jn} y_{in},$$
$$H_{ij} = \lambda_{j1} \eta_{i1} + \ldots + \lambda_{jn} \eta_{in} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

et les deux déterminants L et Λ des constantes l d'une part, λ de l'autre, seront différents de zéro.

Exprimons les éléments η_{ij} en fonction des éléments y_{ij}. Les relations sont à coefficients constants et de la forme

$$\eta_{ij} = C_{j1} y_{i1} + \ldots + C_{jn} y_{in},$$

et nous en tirons

$$H_{ij} = C_{j1} Y_{i1} + \ldots + C_{jn} Y_{in}.$$

Il résulte de là, en développant les deux expressions de H_{ij}

$$H_{ij} = (C_{j1} l_{11} + \ldots + C_{jn} l_{n1}) y_{i1} + \ldots + (C_{j1} l_{1n} + \ldots + C_{jn} l_{nn}) y_{in},$$
$$H_{ij} = (\lambda_{j1} C_{11} + \ldots + \lambda_{jn} C_{n1}) y_{i1} + \ldots + (\lambda_{j1} C_{1n} + \ldots + \lambda_{jn} C_{nn}) y_{in},$$

que l'on a

$$C_{j1} l_{1i} + \ldots + C_{jn} l_{ni} = \lambda_{j1} C_{1i} + \ldots + \lambda_{jn} C_{ni};$$

on en conclut (§ 58, Chapitre II) *que les diviseurs élémentaires du déterminant*

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} l_{11} - \omega & \ldots & l_{n1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ l_{1n} & \ldots & l_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

ne dépendent pas du choix du système fondamental de solutions qui sert à former ce déterminant.

67. Posons en général

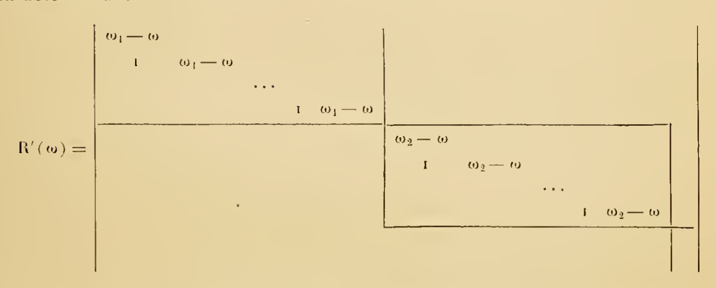
$$Y_{ij} = l_{j1}y_{i1} + \ldots + l_{jn}y_{in},$$

les coefficients l étant indépendants de l'indice i. Nous venons de voir que le déterminant

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} l_{11} - \omega & \ldots & l_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ l_{n1} & \ldots & l_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

conserve les mêmes diviseurs élémentaires quand on change le système fondamental de solutions.

On a vu d'autre part (Chapitre II, § 53, équat. 46) qu'on peut former *a priori* un déterminant



ayant les mêmes diviseurs élémentaires que le précédent. Il résulte de là que l'on peut faire une double substitution de la forme

$$y_{ij} = C_{j1}y'_{i1} + \ldots + C_{jn}y'_{in},$$
$$x'_{ij} = C_{1j}x_{i1} + \ldots + C_{nj}x_{in},$$

qui ramène à la fois la forme

$$x_{i1}Y_{i1} + \ldots + x_{in}Y_{in}$$

à la forme

$$x'_{i1}Y'_{i1} + \ldots + x'_{in}Y'_{in},$$

et la forme

$$x_{i1}y_{i1} + \ldots + x_{in}y_{in}$$

à la forme

$$x'_{i1}y'_{i1} + \ldots + x'_{in}y'_{in},$$

les y' et les Y' étant les anciennes et les nouvelles valeurs des éléments qui correspondent au déterminant $R'(\omega)$.

Or, si l'on considère la forme de ce déterminant $R'(\omega)$ par rapport aux coefficients qu'on appelait l d'une manière générale, on voit qu'on a les relations importantes pour un système choisi y'_{ij} de solutions

$$\begin{aligned}
Y'_{i1} &= \omega_1 y'_{i1},\\
Y'_{i2} &= \omega_1 y'_{i2} + y'_{i1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Y'_{ik} &= \omega_1 y'_{ik} + y'_{i,k-1},\\
Y'_{i'1} &= \omega_2 y'_{i'1},\\
Y'_{i'2} &= \omega_2 y'_{i'2} + y'_{i'1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Y'_{i'k'} &= \omega_2 y'_{i'k'} + y'_{i',k'-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On a donc ce théorème remarquable :

Soient $(\omega_1 - \omega)^{e_1}, \ldots, (\omega_\rho - \omega)^{e_\rho}$ *les diviseurs élémentaires du déterminant* $R(\omega)$, *et il importe peu que les binomes* $\omega_1 - \omega, \ldots, \omega_\rho - \omega$ *soient distincts ou non, on peut trouver un système fondamental de solutions dont les éléments se groupent d'après les relations*

$$\begin{aligned}
Y_{i1} &= \omega_h y_{i1},\\
Y_{i2} &= \omega_h y_{i2} + y_{i1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Y_{i,e_h} &= \omega_h y_{i,e_h} + y_{i,e_h-1},
\end{aligned}$$

$(\omega_h - \omega)^{e_h}$ *étant l'un quelconque des* ρ *diviseurs élémentaires de* $R(\omega)$.

On peut arriver à ces relations en partant d'un système fondamental quelconque de solutions, et en substituant à ses éléments d'autres éléments qui leur soient liés par des relations linéaires indépendantes et à coefficients constants convenablement choisis.

68. La seconde partie du théorème précédent conduit à la question intéressante du choix des coefficients constants qui permettent de passer d'un système fondamental au système spécial défini par le théorème.

Soit $\omega_1 - \omega$ un diviseur linéaire quelconque du déterminant

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} l_{11} - \omega & \ldots & l_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ l_{n1} & \ldots & l_{nn} - \omega \end{vmatrix},$$

correspondant aux éléments y_{ij} d'un système fondamental de solutions; on a,

par suite,

$$(57) \qquad Y_{ij} = l_{j1} y_{i1} + \ldots + l_{jn} y_{in}.$$

L'équation $R(\omega) = 0$ s'appelle, d'après M. Fuchs, *l'équation fondamentale déterminante* ou simplement *l'équation fondamentale*.

Soient $(\omega_1 - \omega)^{h_0}$, $(\omega_1 - \omega)^{h_1}$, ..., $(\omega_1 - \omega)^{h_{r-1}}$ les plus hautes puissances de $\omega_1 - \omega$ qui divisent respectivement $R(\omega)$, puis tous ses mineurs du premier ordre, ..., enfin tous ses mineurs de l'ordre $r - 1$. On sait que les nombres h_0, h_1, ..., h_{r-1} ne peuvent aller qu'en décroissant, et que leurs différences successives

$$h_0 - h_1 = e_0, \qquad h_1 - h_2 = e_1, \qquad \ldots, \qquad h_{r-2} - h_{r-1} = e_{r-2}, \qquad h_{r-1} = e_{r-1}$$

ne peuvent pas aller en croissant.

Puisqu'il doit exister une solution satisfaisant à la relation

$$U_i = \omega_1 u_i,$$

si l'on a

$$u_i = g_1 y_{i1} + \ldots + g_n y_{in}$$

et, par suite,

$$U_i = g_1 Y_{i1} + \ldots + g_n Y_{in} = \Sigma (g_1 l_{1j} + \ldots + g_n l_{nj}) y_{ij},$$

on devra pouvoir satisfaire aux conditions

$$(58) \qquad l_{1j} g_1 + \ldots + (l_{jj} - \omega_1) g_j + \ldots + l_{nj} g_n = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Or le déterminant $R(\omega)$ admettant le diviseur linéaire $\omega_1 - \omega$, on voit déjà que les conditions (58) sont compatibles. Ensuite tous les mineurs de $R(\omega)$ s'annulant pour $\omega = \omega_1$ jusqu'à ceux de l'ordre r exclusivement, on pourra exprimer g_1, g_2, ..., g_n en fonctions linéaires et homogènes de r constantes arbitraires.

Il y aura donc r solutions u_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, r$) linéairement indépendantes, satisfaisant à la relation

$$U_{ij} = \omega_1 u_{ij}$$

et *donnant par combinaisons linéaires toutes les autres solutions qui satisfont aux mêmes relations.*

69. Ces r solutions étant déterminées, il existera des solutions $u'_{ij'}$ satisfaisant aux relations

$$U'_{ij'} = \omega_1 u'_{ij'} + u'_{i,j'-1},$$

si tous les diviseurs élémentaires fournis par $\omega_1 - \omega$ ne sont pas simples.

Pour trouver ces nouvelles solutions, nous supposerons qu'on a choisi pour système fondamental un système de solutions où entrent les fonctions déjà calculées u_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, r$). Ce système peut être considéré comme fondamental, car on peut évidemment prendre arbitrairement les valeurs de r désignées des quantités $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Soient $g_1, g_2, g_r, \ldots$ ces quantités. Si le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{r1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1r} & \cdots & g_{rr} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, on pourra substituer, quelles que soient les valeurs que l'on calcule pour $g_{r+1}, g_{r+2}, \ldots, g_n$, le système u_{ij}, y_{ij} au système primitif, sans que le nouveau système *cesse d'être fondamental.*

Alors les relations (57) prendront la forme

$$(57\,a)\quad \begin{cases} U_{i1} = \omega_1 u_{i1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_{ir} = \omega_1 u_{ir}, \\ Y_{i,r+1} = l'_{r+1} u_{i1} + \ldots + l'_{r+1,r} u_{ir} + l'_{r+1,r+1} y_{i,r+1} + \ldots + l'_{r+1,n} y_{in}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_{in} = l'_{n1} u_{i1} + \ldots + l'_{nr} u_{ir} + l'_{n,r+1} y_{i,r+1} + \ldots + l'_{nn} y_{in}. \end{cases}$$

70. Nous montrerons tout d'abord qu'il existe une relation de la forme

$$U'_i = \omega_1 u'_1 + \varphi_i(u_{ij}),$$

où φ_i est une fonction linéaire homogène à coefficients constants des u_{ij}, et avec la condition

$$u'_i = g'_1 u_{i1} + \ldots + g'_r u_{ir} + g'_{r+1} y_{i,r+1} + \ldots + g'_n y_{in},$$

qui entraîne

$$U'_i = g'_1 U_{i1} + \ldots + g'_r U_{ir} + g'_{r+1} Y_{i,r+1} + \ldots + g'_n Y_{in}.$$

Il faudra que l'on ait

$$\begin{aligned} g'_1 \omega_1 u_{i1} + \ldots + g'_r \omega_1 u_{ir} + g'_{r+1}(l'_{r+1,1} u_{i1} + \ldots + l'_{r+1,n} y_{in}) + \ldots \\ + g'_n(l'_{n,1} u_{i1} + \ldots + l'_{nn} y_{in}) \\ = \omega_1(g'_1 u_{i1} + \ldots + g'_r u_{ir} + g'_{r+1} y_{i,r+1} + \ldots + g'_n y_{in}) + \lambda_1 u_{i1} + \ldots \lambda_r u_{ir}. \end{aligned}$$

On tire de là les équations de condition suivantes :

$$(58\,a)\quad \begin{cases} g'_{r+1}\,l'_{r+1,1} + \ldots + g'_n\,l'_{n1} = \lambda_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g'_{r+1}\,l'_{r+1,r} + \ldots + g'_n\,l'_{nr} = \lambda_r, \\ g'_{r+1}\,(l'_{r+1,r+1} - \omega) + \ldots + g'_n\,l'_{n,r+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g'_{r+1}\,l'_{r+1,n} + \ldots + g'_n(l'_{nn} - \omega) = 0. \end{cases}$$

Ces équations ne renfermant pas $g'_1, \ldots, g'_r$, on pourra prendre ces quantités égales à o et poser simplement

$$(59)\qquad u'_i = g'_{r+1}\,y_{i,r+1} + \ldots + g'_n\,y_{in}.$$

Mais alors les quantités $g'_{r+1}, \ldots, g'_n$, qui sont seules à déterminer, devront pouvoir se tirer des équations (58 a) auxquelles elles satisfont.

Effectivement, si l'on prend les $n-r$ dernières équations précédentes, le déterminant des coefficients l' correspondant est un mineur de l'ordre r du déterminant

$$R'(\omega) = \left|\begin{array}{cc|ccc} \omega_1 - \omega & \ldots\ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & . & \ldots & . \\ \ldots\ldots & \omega_1 - \omega & 0 & \ldots & 0 \\ \hline l'_{r+1,1} & \ldots\ldots & l'_{r+1,r+1} - \omega & \ldots & l'_{r+1,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ l'_{n,1} & \ldots\ldots & l'_{r+1,n} & \ldots & l'_{nn} - \omega \end{array}\right|$$

relatif au système de solutions (57 a) et qui a les mêmes diviseurs élémentaires que le déterminant $R(\omega)$. Si ce déterminant mineur est nul, les dernières équations (58 a) sont compatibles, et de ces équations on tirera les valeurs de $g'_{r+1}, \ldots, g'_n$ et, si l'on veut, ensuite on aura les valeurs des inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ par les premières équations (58 a).

71. Examinons le déterminant $R'(\omega)$. Il est égal à $(\omega_1 - \omega)^r \times R_1(\omega)$ en posant

$$R_1(\omega) = \begin{vmatrix} l'_{r+1,r+1} - \omega & \ldots & l'_{r+1,n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ l'_{n,r+1} & \ldots & l'_{nn} - \omega \end{vmatrix}.$$

Or $R'(\omega)$, ayant les mêmes diviseurs élémentaires que $R(\omega)$, est divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_0}$, donc $R_1(\omega)$ est divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_0 - r}$. Les mineurs du premier ordre de $R'(\omega)$ seront divisibles par $(\omega_1 - \omega)^{h_1}$. En particulier, chaque mineur, égal à $(\omega_1 - \omega)^r M_1 R_1(\omega)$, où M_1 est la caractéristique d'un mineur du premier

ordre, est divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_1}$ et, par suite, chaque mineur $M_1 R_1(\omega)$ est divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_1 - r}$.

De même chaque mineur du deuxième ordre de $R_1(\omega)$, représenté par $M_2 R_1(\omega)$, est divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_2 - r}$, etc. Enfin, chaque mineur de l'ordre $r - 1$ de $R_1(\omega)$ sera divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_{r-1} - r}$. On pourra le représenter par $M_{r-1} R_1(\omega)$.

Discutons ces résultats. Il faut d'abord écarter les puissances $(\omega_1 - \omega)^{h-r}$ dont les exposants ne seraient pas positifs. Comme les nombres $h_0, h_1, \ldots, h_{r-1}$ vont en décroissant, on voit que le nombre r séparera cette suite de nombres en deux autres, l'une $h_0, h_1, \ldots, h_{s-1}$ de nombres plus grands que r et l'autre $h_s, \ldots, h_{r-1}$ de nombres plus petits que r. Les premiers seront seuls à considérer.

En conséquence, nous dirons que le déterminant $R_1(\omega)$ et ses mineurs d'ordres successifs admettent jusqu'à l'ordre s exclusivement les diviseurs respectifs

$$(\omega_1 - \omega)^{h_0 - r}, \quad \ldots, \quad (\omega_1 - \omega)^{h_{s-1} - r}.$$

Deux cas pourront se présenter. On pourra avoir $h_0 = r$; alors les solutions $u_{i1}, \ldots, u_{ir}$ seront toutes les solutions distinctes correspondant à la racine ω_1. Dans le cas de $h_0 = r$, on sait que le diviseur $(\omega_1 - \omega)^r$ fournit r diviseurs élémentaires simples. Nous nous trouvons d'accord avec la théorie des paragraphes précédents.

On peut avoir $h_0 > r$, alors ω_1 est racine de $R_1(\omega) = 0$, et le calcul préparé plus haut montre que l'on peut former *s solutions indépendantes,* telles que l'on ait

$$U'_i = \omega_1 u'_i + \varphi_i(u_{ij}), \tag{60}$$

où φ est la caractéristique d'une fonction linéaire et homogène à coefficients constants.

La fonction φ_i satisfait, comme les éléments u_{ij} eux-mêmes, à la relation

$$\Phi_i = \omega_1 \varphi_i.$$

Soient $u'_{ij'}$ $(j' = 1, 2, \ldots, s)$ les nouvelles solutions. Toutes celles qui satisfont aux mêmes relations (60), pouvant être obtenues par le même procédé, ne pourront être que des groupes de fonctions linéaires et homogènes des u et des u'.

Il ne peut y avoir entre $\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{is}$ aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants, sans quoi l'on pourrait former une fonction linéaire et homogène avec $u'_{i1}, \ldots, u'_{is}$ satisfaisant à la relation

$$U'_i = \omega_1 u'_i.$$

Cette solution serait bien distincte des u_{ik}, puisque les u' ne dépendent que des y.

Il y aurait donc plus de r solutions satisfaisant à la relation

$$U = \omega_1 u,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Maintenant, puisque $\varphi_{i1}, \ldots \varphi_{is}$ sont des fonctions indépendantes, elles peuvent remplacer s des solutions $u_{i1}, \ldots, u_{ir}$ et porter les mêmes noms, de sorte que l'on peut écrire, sans nuire à la généralité, les relations

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{ll} U_{ij} = \omega_1 u_{ij} & (j = 1, 2, \ldots, r), \\ U'_{ij'} = \omega_1 u'_{ij'} + u_{.j'} & (j' = 1, 2, \ldots, s), \\ Y_{ij''} = l''_{j''1} u_{i1} + \ldots + l''_{j''r} u_{ir} + l'_{j'',r+1} u'_{i1} + \ldots + l''_{j'',r+s} u'_{is} & \\ \qquad + l'_{j'',r+s+1} y_{i,r+s+1} + \ldots + l''_{j''n} y_{in} & (j'' = r + s + 1, \ldots, n), \end{array} \right.$$

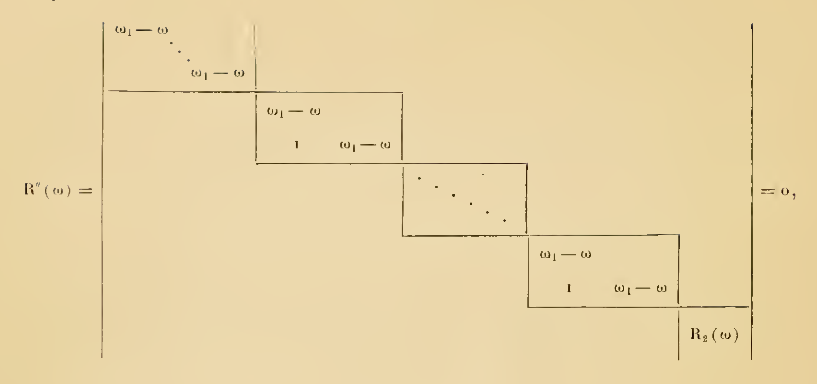
où entrent les anciennes et les nouvelles valeurs d'un système fondamental choisi de solutions des équations (A).

72. Nous pouvons, avec un changement d'indices, écrire les équations précédentes sous la forme

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{ll} U_{ij} \quad = \omega_1 u_{ij} & (j = 1, 2, \ldots, r - s), \\ U_{i,j_1+1} = \omega_1 u_{i,j_1+1} & (j_1 = r - s), \\ U'_{i,j_1+1} = \omega_1 u'_{i,j_1+1} + u_{i,j_1+1}, & \\ U_{i,j_1+2} = \omega_1 u_{i,j_1+2}, & \\ U'_{i,j_1+2} = \omega_1 u'_{i,j_1+2} + u_{i,j_1+2}, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ U_{ir} \quad = \omega_1 u_{ir}, & \\ U'_{ir} \quad = \omega_1 u'_{ir} + u_{ir}. & \end{array} \right.$$

Les autres équations (61) en Y conservent les mêmes notations et le même ordre.

L'équation fondamentale, tirée des équations (62), prend la forme



en posant

$$R_2(\omega) = \begin{vmatrix} l''_{j_2 j_2} - \omega & \dots & l''_{j_2 n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ l''_{n j_2} & \dots & l''_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

et $j_2 = r + s + 1$. En outre, on emploie une forme aussi abrégée que possible pour la représentation de $R''(\omega)$.

$R''(\omega)$ a les mêmes diviseurs élémentaires que $R(\omega)$. De plus, un déterminant $R'_1(\omega)$, tiré de $R''(\omega)$ comme $R_1(\omega)$ est tiré de $R'(\omega)$, aurait le même diviseur commun à tous ses mineurs de chaque ordre que $R_1(\omega)$.

Un déterminant tel que

$$\begin{vmatrix} \omega_1 - \omega & 0 \\ 1 & \omega_1 - \omega \end{vmatrix}$$

admet un diviseur simple $(\omega_1 - \omega)^2$.

Développons par la règle de Laplace un déterminant quelconque de la forme

$$\begin{vmatrix} \omega_1 - \omega & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \omega_1 - \omega & \dots & \dots & 0 \\ a & b & c & \dots & l \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots & . \\ a' & b' & c' & \dots & l' \end{vmatrix},$$

en nous servant des deux premières lignes; nous voyons qu'il sera égal à

$$\begin{vmatrix} \omega_1 - \omega & 0 \\ 1 & \omega_1 - \omega \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c & \dots & l \\ .. & \dots & .. \\ c' & \dots & l' \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire qu'il sera divisible par $(\omega_1 - \omega)^2$.

Il résulte de là que les mineurs de $R''(\omega)$, formés en employant les $r+s$ premières lignes, seront divisibles par $(\omega_1 - \omega)^{r+s}$ et, par suite, un mineur quelconque d'ordre ϖ de $R_2(\omega)$ sera divisible par $h_\varpi - (r+s)$.

Comme précédemment, il faudra chercher un nombre t tel que tous les nombres $h_0, h_1, \ldots, h_{t-1}$ soient plus grands que $r+s$ et les autres nombres $h_t, \ldots, h_{r-1}$ plus petits.

Si l'on a

$$h_0 = r+s,$$

alors les solutions $u_{i1}, \ldots, u'_{ir}$ (*voir* les équations 62) sont toutes les solutions distinctes correspondantes à la racine ω_1.

Mais si l'on a

$$h_0 > r+s,$$

alors ω_1 est une racine de $R_2(\omega) = 0$, et nous pouvons continuer le calcul de la manière suivante.

Posons

$$(63)\quad \begin{cases} g''_{j_2} l''_{j_2 j_2} + \ldots + g''_n l''_{n j_2} = \omega_1 g''_{j_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g''_{j_2} l''_{j_2 n} + \ldots + g''_n l''_{nn} = \omega_1 g''_n. \end{cases}$$

De ces équations (63) nous pourrons tirer t systèmes de valeurs distinctes pour $g''_{j_2}, \ldots, g''_n$ et former t solutions

$$w_i = g''_{j_2} y_{i,j_2} + \ldots + g''_n y_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, t),$$

linéairement indépendantes entre elles, et linéairement distinctes des fonctions déjà formées, puisqu'elles dépendent des y. Or, si l'on multiplie les dernières équations (62) par $g''_{j_2}, \ldots, g''_n$ et si l'on ajoute, on voit que la solution w_i satisfait aux relations

$$(64)\qquad W_i = \omega_1 w_i + \psi_i(u_{i1}, \ldots, u'_{ir}),$$

en représentant par ψ_i une fonction linéaire et homogène à coefficients constants.

Les t solutions w_i permettent de former toute autre solution satisfaisant aux relations (64), car on a suivi une marche de calcul qui doit toutes les fournir. Entre les fonctions $\psi_{i1}, \ldots, \psi_{it}$ il ne peut y avoir aucune relation de la forme

$$\alpha\psi_{i1} + \ldots + \lambda\psi_{it} = f(u_{i1}, \ldots, u_{ir}),$$

où $\alpha, \ldots, \lambda$ sont des constantes et f une fonction linéaire et homogène à coefficients constants, car il existerait une fonction linéaire et homogène de $w_{i1}, \ldots,$

ϖ_{it}, qui, n'étant pas une expression des solutions $u_{i1}, \ldots, u_{ir}$, jouirait des propriétés des éléments u', ce qui est impossible.

On remarquera aussi que t est au plus égal à s, car, s'il en était autrement, par l'élimination des u' on pourrait former une relation

$$\alpha\psi_{i1} + \ldots + \lambda\psi_{it} = f(u_{i1}, \ldots, u_{ir}).$$

On aurait pu voir aussi que s est au plus égal à r. Toutes ces remarques sont bien d'accord avec la théorie déjà connue.

73. La méthode suivie peut évidemment s'appliquer indéfiniment, et l'on retrouve sous une autre forme les propositions du n° 67.

74. Après avoir tiré tout ce qu'il est possible du diviseur $\omega_1 - \omega$ de $R(\omega)$, on pourra former un système fondamental de solutions

$$u_{ih} \qquad (h = 1, 2, \ldots, h_0),$$
$$y_{ik} \qquad (k = h_0 + 1, \ldots, n),$$

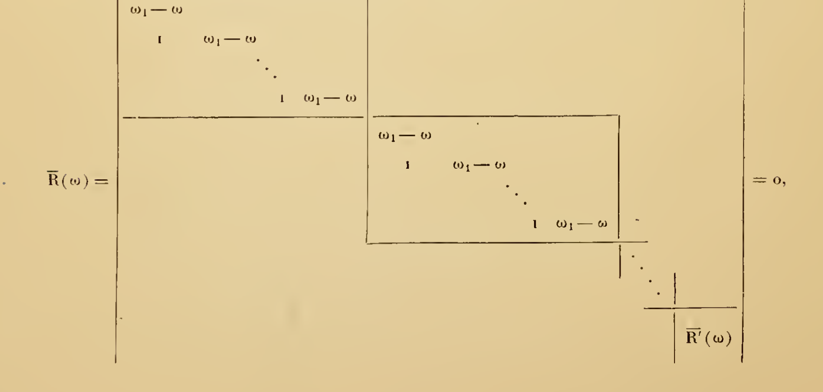
satisfaisant aux relations

$$U_{ih} = \omega_1 u_{ih} + \omega_{1h} u_{i,h-1}, \tag{64}$$

les quantités ω_{1h} étant égales à zéro ou à l'unité, à l'exception de ω_1, et aux relations

$$Y_{ij} = G_{j1} u_{i1} + \ldots + G_{jh_0} u_{i,h_0} + G_{jh_0+1} y_{i,h_0+1} + \ldots + G_{jn} y_{in}. \tag{65}$$

On pourra raisonner sur l'équation fondamentale



où l'on a

$$R'(\omega) = \begin{vmatrix} G_{h_0+1,h_0+1} - \omega & \dots & G_{n,h_0+1} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ G_{h_0+1,n} & \dots & G_{nn} - \omega \end{vmatrix},$$

comme on a raisonné sur $R(\omega)$.

En outre, si l'on forme le système d'équations

$$\begin{aligned}
&(\omega_1 - \omega)\, m_1 + G_{h_0+1,1}\, m_{h_0+1} + \dots + G_{n1}\, m_n = 0, \\
&\omega_{12}\, m_1 + (\omega_1 - \omega)\, m_2 + G_{h_0+1,2}\, m_{h_0+1} + \dots + G_{n2}\, m_n = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
&(G_{h_0+1,h_0+1} - \omega)\, m_{h_0+1} + \dots + G_{nh_0+1}\, m_n = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
&G_{h_0+1,n}\, m_{h_0+1} + \dots + (G_{nn} - \omega)\, m_n = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

on pourra le résoudre en prenant pour ω une valeur ω_2 différente de ω_1 et annulant $R(\omega)$, puis en calculant les valeurs proportionnelles de $m_{h_{0+1}}, \dots, m_n$, et enfin en calculant successivement les autres inconnues m, dont chacune a pour coefficient $\omega_1 - \omega_2$ dans une des premières équations.

On en conclura, comme au n° 68, qu'on peut former un système fondamental de solutions

$$u_{ih} \qquad (h = 1, 2, \dots, h_0 + h'_0),$$
$$y_{ik} \qquad (k = h_0 + h'_0 + 1, \dots, n),$$

où les h'_0, h'_0 premières solutions sont particularisées.

En partant de ce système fondamental et par des raisonnements analogues aux précédents, on pourra former des systèmes fondamentaux de plus en plus particuliers, jusqu'à arriver à la réalisation complète du théorème énoncé au n° 67.

75. Nous devons maintenant traduire les théorèmes démontrés jusqu'ici en supposant le point initial situé à l'infini.

Reprenons les équations (A) et remplaçons-y la variable x par la variable $\frac{1}{x'}$, de sorte que, quand x devient infini, x' devient nul. Il suffira alors d'étudier les fonctions y dans le domaine de l'origine $x' = 0$.

On aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'}\frac{dx'}{dx} = -\frac{dy}{dx'}x'^2 = -x'^2\frac{dy}{dx'},$$

et les équations (A) deviendront

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}\, y_1 + \dots + a'_{in}\, y_n,$$

en appelant a' ce que devient une fonction a divisée par x'^2, changée de signe et exprimée au moyen de la variable x'.

Le système (A') étant de la même forme que le système (A), on pourra lui appliquer tous les théorèmes démontrés précédemment. Le point $x' = 0$ pourra d'ailleurs être un point singulier ou non singulier des fonctions a'.

76. Si l'on considère l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n, on sait qu'on peut en faire l'étude au moyen d'un système d'équations linéaires et homogènes équivalent.

On obtient alors les théorèmes suivants qu'il suffit d'énoncer.

I. *Si la variable indépendante revient à sa valeur initiale, les nouvelles valeurs* Y_i *des intégrales d'un système fondamental sont liées aux anciennes* y_i *par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme*

$$(66) \qquad Y_i = c_{i1} y_1 + \ldots + c_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (\text{n}^\circ\ 61).$$

II. *Les relations précédentes se réduisent à*

$$Y_i = y_i,$$

si le chemin fermé décrit par la variable peut être déformé d'une manière continue sans rencontrer de points singuliers jusqu'à être réduit à un point; les fonctions y *sont uniformes dans la région où cette hypothèse est réalisée* (n° 62).

III. *Les équations* (66) *sont caractéristiques des intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre* n.

C'est-à-dire que, si n fonctions $y_1, \ldots, y_n$ linéairement *indépendantes* prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants, telles que les relations (66), ces fonctions forment un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire et homogène *d'ordre* n, dont les coefficients sont uniformes, et n'ont pas d'autres points *singuliers* dans la région considérée que les points singuliers des fonctions y.

IV. *Les diviseurs élémentaires du déterminant*

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} c_{11} - \omega & \ldots & c_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

ne dépendent pas du choix du système fondamental d'intégrales qui sert à former ce déterminant.

On sait déjà que M. Fuchs a donné à l'équation $R(\omega) = 0$ le nom d'*équation fondamentale déterminante relativement au point* $x = 0$.

V. *Soient* $(\omega_1 - \omega)^{e_1}, \ldots, (\omega_\rho - \omega)^{e_\rho}$ *les diviseurs élémentaires du déterminant* $R(\omega)$, *on peut construire, en partant d'un système fondamental quelconque d'intégrales, un système fondamental dont les éléments se groupent d'après les relations*

$$\begin{aligned} Y_1 &= \omega_h y_1, \\ Y_2 &= \omega_h y_2 + y_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_{e_h} &= \omega_h y_{e_h} + y_{e_h - 1}, \end{aligned}$$

$(\omega_h - \omega)^{e_h}$ *étant l'un quelconque des diviseurs élémentaires du déterminant fondamental* $R(\omega)$.

VI. Si le point initial est à l'infini, on remplacera x par $\frac{1}{x'}$ et, au lieu de l'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$

où la variable est x, on considérera une équation de même forme où la variable sera x'.

CHAPITRE IV.

DE LA FORME ANALYTIQUE DES ÉLÉMENTS DES SOLUTIONS.

77. On sait, depuis Euler, intégrer complètement les équations et les systèmes linéaires et homogènes à coefficients constants.

Considérons d'abord une équation linéaire, homogène et à coefficients constants de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0. \tag{67}$$

Cette équation peut être remplacée par le système équivalent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} + p_1 y_1 + \ldots + p_n y_n = 0, \\ &\frac{dy_k}{dx} = y_{k-1}, \qquad (k = 2, 3, \ldots, n). \end{aligned}\right. \tag{68}$$

On intègre ce système en posant

$$y_k = c_k e^{rx},$$

et en déterminant les inconnues par les conditions

$$\left\{\begin{aligned} &c_1 r + p_1 c_1 + \ldots + p_n c_n = 0, \\ &c_k r = c_{k-1}. \end{aligned}\right. \tag{69}$$

Ces équations (69) entraînent la relation

$$F(r) = \begin{vmatrix} r + p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_n \\ -1 & r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & r & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & r \end{vmatrix} = 0. \tag{70}$$

L'équation $F(r) = 0$ est appelée l'*équation caractéristique*.

Si l'on élimine directement les inconnues C, on a

$$C_2 r = C_1,$$
$$C_3 r^2 = C_2 r = C_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$C_n r^{n-1} = C_1,$$

et, par suite de la première équation (69),

$$F(r) = r^n + p_1 r^{n-1} + \ldots + p_n = 0.$$

Les diviseurs élémentaires du déterminant $F(r)$ se confondant dans le cas des équations d'ordre n avec les diviseurs linéaires du polynome $F(r)$ (¹), *il suffit de résoudre l'équation algébrique* $F(r) = 0$ *de degré* n *pour connaître les diviseurs élémentaires du déterminant* $F(r)$.

Soit $(r - r_1)^{e_1}$ un diviseur élémentaire ou linéaire quelconque du déterminant $F(r)$. Ce déterminant $F(r)$ et ses dérivées successives admettront $(r - r_1)$ comme diviseur jusqu'aux dérivées de l'ordre e_1 exclusivement. En conséquence, si l'on pose

$$\varphi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y,$$

et si l'on considère l'équation

$$\varphi(Ce^{rx}) = Ce^{rx} F(r),$$

on voit que l'on aura successivement

$$\varphi(Ce^{r_1 x}) = 0,$$

$$\varphi\left[\frac{\partial}{\partial r_1}(Ce^{r_1 x})\right] = 0,$$

$$\varphi\left[\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}(Ce^{r_1 x})\right] = 0,$$

$$\varphi\left[\frac{\partial^{e_1 - 1}}{\partial r^{e_1 - 1}}(Ce^{r_1 x})\right] = 0.$$

On en conclut que chaque diviseur élémentaire $(r - r_1)^{e_1}$ fournit e_1 solutions, et, par suite, qu'on peut former n solutions des équations (68), ou encore n intégrales de l'équation (67).

Ces intégrales sont linéairement indépendantes. Car supposons que l'on ait identiquement

$$a_1 e^{r_1 x} + b_1 \frac{\partial}{\partial r_1}(e^{r_1 x}) + \ldots + l_1 \frac{\partial^{e_1 - 1}}{\partial r_1^{e_1 - 1}}(e^{r_1 x}) + a_2 e^{r_2 x} + \ldots = 0.$$

Remarquons que l'on a en général

$$\frac{\partial^k (e^{rx})}{\partial r^k} = x^k e^{rx}.$$

(¹) *Voir* Chapitre I, nº 22.

L'identité précédente reviendrait donc à la suivante

$$e^{r_1 x}(a_1 + b_1 x + \ldots + l_1 x^{e_1 - 1}) + e^{r_2 x}(a_2 + \ldots) + \ldots = 0,$$

ou encore à l'équation

$$-(a_1 + b_1 x + \ldots + l_1 x^{e_1 - 1}) = e^{(r_2 - r_1)x}(a_2 + \ldots) + \ldots.$$

Or le premier membre de cette équation s'annulerait pour un nombre fini de valeurs, le second aurait au contraire une infinité de racines, puisque les exponentielles ne peuvent disparaître identiquement. L'identité est impossible.

78. Considérons au même point de vue les équations

$$(A) \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on suppose constants les coefficients a. On trouve des solutions de ce système en posant

$$(71) \qquad y_i = C_i e^{rx},$$

et en déterminant les inconnues r et C_i par les équations

$$(72) \qquad F(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r & \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0$$

et

$$(73) \qquad \begin{cases} (a_{11} - r)C_1 + \ldots + \quad a_{1n} C_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1} C_1 \quad + \ldots + (a_{nn} - r) C_n = 0. \end{cases}$$

L'équation $F(r) = 0$ est dite encore l'*équation caractéristique*.

La résolution de l'équation algébrique $F(r) = 0$ de degré n ne fournit pas, comme dans le cas précédent, les diviseurs élémentaires du déterminant $F(r)$. Il y a lieu de les chercher, et ils peuvent être distincts des diviseurs linéaires.

Sans entrer dans le détail du calcul qui résultera de paragraphes plus éloignés, on peut remarquer que toutes les solutions auront la forme de polynomes en $e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_\rho x}$, dont les coefficients sont eux-mêmes des polynomes en x, et, par suite, le point ∞ est pour les éléments des solutions un point singulier de même nature que pour les fonctions e^{rx}. C'est-à-dire que, dans le domaine du point ∞, les solutions seront composées d'éléments uniformes, et continus en tous les points, sauf au point $x = \infty$, où chaque élément de solution sera de la nature de e^{rx}

Posons

$$x = \frac{1}{x'},$$

le système (A) deviendra

$$\text{(A')} \qquad -\frac{dy_i}{dx'} = \frac{1}{x'^2}(a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n),$$

et l'on voit qu'au point $x = \infty$, ou $x' = 0$, tous les coefficients des équations (A') cessent d'être continus.

Pour étudier l'intégration complète du système (A), nous ferons un changement de variable indépendante qui ramènera le système (A) à une forme plus importante que nous étudierons plus loin avec tous les détails nécessaires.

Nous poserons

$$e^x = z$$

et, par suite,

$$e^x\,dx = dz = z\,dx.$$

Il vient alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = z\frac{dy}{dz},$$

et le système (A) deviendra

$$\text{(A'')} \qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,$$

en rétablissant la lettre x pour désigner la variable indépendante.

C'est sous la forme (A″) et d'une manière tout à fait générale, c'est-à-dire en ne supposant plus que les coefficients a soient des constantes, que nous intégrerons le système (A).

Ajoutons une remarque. Le changement de variable $e^x = z$ donne bien z comme fonction uniforme de x; mais on a $x = \log z$, de sorte que x n'est pas uniforme en z dans toute région du plan qui renferme le point $z = 0$ ou le point $z = \infty$.

79. Nous considérerons maintenant le système le plus général

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_i y_n,$$

en supposant que les coefficients a soient uniformes dans le domaine de l'origine. Rappelons que l'origine est un point quelconque. Nous supposerons, en outre, que le point $x = 0$ est un point singulier ou non des coefficients a.

Soit $R(\omega)$ le déterminant qui résulte de la considération des éléments d'un système fondamental de solutions, quand la variable x fait le tour de l'origine.

Soit

$$(\omega_k - \omega)^{e_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \rho)$$

un diviseur élémentaire quelconque de $R(\omega)$. On peut ramener le déterminant $R(\omega)$ à une forme canonique $R'(\omega)$, comme on l'a vu dans la théorie des diviseurs élémentaires (Chapitre II, n° 53). Cette forme étant unique, la méthode de recherche d'un système spécial de solution des équations (A) doit conduire précisément aux solutions qui correspondent à la forme canonique $R'(\omega)$. Nous avons exposé cette méthode pratique aux nos 68 et suivants du Chapitre III.

Nous voulons maintenant étudier directement *le* système spécial de solutions des équations (A). Nous considérerons ce système comme étant seul de son espèce, quoiqu'il reste dans sa construction une certaine indétermination. En effet, si deux solutions, par exemple, satisfont aux relations

$$Y_i = \omega y_i \qquad \text{et} \qquad Y'_i = \omega y'_i,$$

on peut, dans certains cas, les remplacer par des combinaisons

$$a Y_i + b Y'_i, \quad a' Y_i + b' Y'_i,$$

pourvu que le déterminant $ab' - ba'$ soit différent de zéro. Abstraction faite de ces modifications possibles qui n'ont aucune importance dans nos théories, nous pouvons dire que le système spécial de solutions est unique.

Ce système spécial est caractérisé par les équations suivantes.

Soit $(\omega_k - \omega)^{e_k}$ *un diviseur élémentaire quelconque du déterminant* $R(\omega)$ *ou de son équivalent* $R'(\omega)$, *il y a* e_k *solutions satisfaisant aux relations*

$$(74)\qquad \left\{\begin{array}{l} Y^k_{i1} = \omega_k y^k_{i1}, \\ Y^k_{i2} = \omega_k y^k_{i2} + y^k_{i1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ Y^k_{ie_k} = \omega_k y^k_{ie_k} + y^k_{i,e_k-1}, \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} (i = 1, 2, \dots, n) \\ (k = 1, 2, \dots, \rho) \end{array}$$

et les n *solutions dont les éléments entrent dans ces équations forment un système fondamental.*

80. Pour plus de simplicité, considérons un groupe de relations de la forme

$$(75)\qquad \left\{\begin{array}{l} Y_1 = \omega y_1, \\ Y_2 = \omega y_2 + y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ Y_m = \omega y_m + y_{m-1}. \end{array}\right.$$

Posons

$$\frac{\log x}{2\pi\sqrt{-1}} = u,$$

de sorte que u augmente de 1 quand la variable x fait le tour de l'origine.

Soit $f(u)$ une fonction entière du degré $m-1$ formée arbitrairement avec u et des coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ uniformes dans le domaine de l'origine. Définissons enfin r par la relation

$$e^{2\pi r\sqrt{-1}} = \omega, \tag{76}$$

et appelons $\Delta_k f(u)$ la différence d'ordre k de $f(u)$ par rapport à l'accroissement 1 de u.

On pourra donner aux fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les formes

$$(77)\qquad \begin{cases} y_m = x^r f(u), \\ y_{m-1} = x^r \omega \Delta f(u), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_{m-k} = x^r \omega^k \Delta_k f(u), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_1 = x^r \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f(u). \end{cases}$$

On voit que $\Delta_{m-1} f(u) = 1.2\ldots(m-1)A_{m-1}$ ne contient pas u et que y_1 est la seule fonction y qui ne contienne pas de logarithmes.

D'abord les expressions précédentes satisfont aux relations imposées. En effet, on a

$$Y_{m-k} = x^r \omega^{k+1} \Delta_k f(u+1) = x^r \omega^{k+1} [\Delta_k f(u) + \Delta_{k+1} f(u)] = \omega y_{m-k} + y_{m-k-1}.$$

Ensuite on peut toujours donner aux fonctions $y_1, \ldots, y_m$ les formes précédentes. En effet, $y_1 x^{-r}$ est une fonction uniforme dans le domaine de l'origine, et l'on peut la représenter par $\omega^{m-1} \Delta_{m-1} f(u)$; on tire de là

$$y_1 = x^r \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f(u).$$

On peut poser ensuite

$$y_2 = \omega^{m-2} x^r z,$$

d'où

$$Y_2 = \omega^{m-1} x^r Z.$$

Si l'on veut satisfaire à la relation

$$Y_2 = \omega y_2 + y_1,$$

on posera

$$Z = z + \Delta_{m-1} f(u).$$

En représentant par $[\varphi]'$ ce que devient une expression φ, quand on tourne autour de l'origine, et remarquant que l'on a

$$\Delta_{m-1} f(u) = \Delta_{m-2} f(u+1) - \Delta_{m-2} f(u) = [\Delta_{m-2} f(u)]' - \Delta_{m-2} f(u),$$

on voit que l'on a

$$[z - \Delta_{m-2} f(u)]' = z - \Delta_{m-2} f(u);$$

$z - \Delta_{m-2} f(u)$ est donc une fonction uniforme de x. Dans le domaine de l'origine, on peut poser simplement

$$z = \Delta_{m-2} f(u),$$

en réunissant cette fonction uniforme au terme indépendant de $\Delta_{m-2} f(u)$. On a ainsi

$$y_2 = \omega^{m-2} x^r \Delta_{m-2} f(u).$$

On remontera ainsi de proche en proche.

La suite des expressions précédentes montre que l'élément y_m, qui contient la plus haute puissance de $\log x$, renferme les m fonctions de x, uniformes dans le domaine de l'origine, qui entrent dans le groupe des expressions $y_1, \ldots, y_m$.

Les relations entre les coefficients des puissances de u, dans les différents éléments du groupe, sont mises en évidence par la forme des expressions précédentes. Le nombre de ces coefficients est

$$1 + 2 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Il y en a m arbitraires. On peut donc dire que ces éléments sont liés entre eux par

$$\frac{m(m+1)}{2} - m \quad \text{ou} \quad \frac{m(m-1)}{2}$$

relations distinctes.

81. Appliquons les résultats précédents aux fonctions y qui satisfont aux relations (74).

Nous aurons, pour les éléments des solutions du système fondamental spécial, les formes analytiques suivantes, valables dans le domaine de l'origine

$$(78)\quad \left\{\begin{array}{l} y^k_{ie_k} = x^r f^k_i(u), \\ y^k_{i,e_k-1} = x^r \omega \Delta f^k_i(u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^k_{i1} = x^r \omega^{e_k-1} \Delta_{e_k-1} f^k_i(u), \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} (i = 1, 2, \ldots, n), \\ (k = 1, 2, \ldots, \rho). \end{array}$$

82. Dans les relations (77), posons

$$x = \frac{1}{x'},$$

et, par suite,

$$u = \frac{\log x}{2\pi\sqrt{-1}} = -\frac{\log x'}{2\pi\sqrt{-1}}.$$

Nous aurons, en général,

$$y_{m-k} = \frac{\omega^k}{x'^r} \Delta_k f(u),$$

ou encore

$$y_{m-k} = x'^{-r} \omega^k \Delta_k f(u).$$

Nous poserons

$$e^{-2\pi r\sqrt{-1}} = \omega.$$

Nous en concluons que, dans le domaine de l'infini, nous devrons, dans les formules (78), changer les signes de u et de r.

83. Nous terminerons ces études d'intégration par les séries, en montrant que les éléments des solutions du système général

$$\text{(B)} \qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

jouissent de propriétés spéciales qui les rapprochent des fonctions algébriques.

Nous venons de voir que les solutions d'un système (A) quelconque s'obtiennent par des combinaisons linéaires d'expressions de la forme

$$x^r(A_0 + A_1 \log x + \ldots + A_k \log^k x).$$

Si les parenthèses sont infinies d'ordre fini pour $x = 0$, c'est-à-dire si l'on peut trouver un nombre entier α tel que le produit

$$x^\alpha(A_0 + A_1 \log x + \ldots + A_k \log^k x)$$

soit nul pour $x = 0$, on dit, d'après M. Thomé, que, quel que soit r, l'expression

$$x^r(A_0 + \ldots + A_k \log^k x)$$

est *régulière* au point $x = 0$. Il suffit évidemment que les fonctions A ne renferment dans leurs développements qu'un nombre fini de puissances négatives x.

Toute combinaison linéaire et homogène à coefficients constants d'expressions *régulières* étant aussi appelée *régulière*, nous allons montrer que tous les éléments des solutions du système (B) sont des expressions régulières, quand les coefficients a sont holomorphes dans le domaine de l'origine.

84. Voici, d'après M. Horn, la manière d'intégrer le système (B), c'est-à-dire le système

$$(79) \qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on a

$$(80) \qquad a_{ij} = a_{ij}^0 + x a_{ij}^1 + \ldots,$$

dans le domaine de l'origine.

Soient

$$(81) \qquad y_i = x^r \varphi_i = x^r (\varphi_i^0 + x \varphi_i^1 + \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les éléments d'une solution du système (79). Nous avons déjà vu qu'il existe une telle solution, et que les séries φ_i sont uniformément convergentes dans un certain domaine de l'origine (Chapitre I, n° 4).

En portant les valeurs (81) dans les équations (79), on a les relations en nombre infini

$$(82) \quad \begin{cases} (\alpha) & \sum_j (a_{ij}^0 - r\delta_{ij}) \varphi_j^0 = 0, \\ (\beta) & \sum_j [a_{ij}^0 - (r+1)\delta_{ij}] \varphi_j^1 + \sum_j a_{ij}^1 \varphi_j^0 = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (\lambda) & \sum_j [a_{ij}^0 - (r+k)\delta_{ij}] \varphi_j^k + \sum_j a_{ij}^1 \varphi_j^{k-1} + \ldots + \sum_j a_{ij}^k \varphi_j^0 = 0, \end{cases}$$

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 0, \ i \neq j \\ 1, \ i = j \end{pmatrix}.$$

Toutes les valeurs initiales φ_i^0 des séries φ_i ne sont pas nulles. Donc, d'après les équations (82α), r doit être l'une des racines de l'équation caractéristique

$$F(r) = |a_{ij}^0 - r\delta_{ij}| = 0.$$

Or, laissons de côté précisément les conditions (82_α); nous pourrons considérer dans toutes les autres la lettre r comme une arbitraire, et nous aurons, par un calcul de proche en proche,

$$(83) \qquad \varphi_i^k = \sum_j \frac{\mathfrak{F}_{ij}^k(r)}{F(r+1)F(r+2)\ldots F(r+k)} \varphi_j^0,$$

expression dans laquelle $\mathfrak{F}$ est une fonction entière des lettres r, a_{ij}^0, a_{ij}^1, …, a_{ij}^k.

Le dénominateur commun ne peut s'annuler que si $r+1$, $r+2$, … ou $r+k$ satisfait à un moment donné à l'équation caractéristique $F(r) = 0$.

Appelons $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les n racines, distinctes ou non, de cette équation. On aura à ce moment

$$r + k' = r_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ k' = 1, 2, \ldots, k).$$

Mais k croît indéfiniment dans la suite des relations (82). Il suffit donc d'écrire

$$r = r_\alpha - k \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, \infty).$$

On voit ainsi que les φ_i^k seront finis, ou infinis d'un ordre varié.

Fixons maintenant les valeurs des indéterminées r, $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$ d'après les règles suivantes :

1° Soit un groupe

$$r_{\alpha_1}, \quad r_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad r_{\alpha_\mu}$$

de μ racines de l'équation caractéristique, telles que deux quelconques de ces racines diffèrent d'un nombre entier.

Il peut y avoir d'autres groupes pareils à celui-là.

Nous supposerons que la suite de ces valeurs ne va pas en croissant, et nous poserons

$$(84)\qquad \left\{\begin{array}{l} r_{\alpha_{\mu-1}} = r_{\alpha_\mu} \ + d_\mu, \\ r_{\alpha_{\mu-2}} = r_{\alpha_{\mu-1}} + d_{\mu-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_{\alpha_1} \ = r_{\alpha_2} \ + d_2, \end{array}\right.$$

$d_2, d_3, \ldots, d_\mu$ étant des nombres entiers positifs.

Ces relations peuvent encore s'écrire

$$(84')\qquad \left\{\begin{array}{l} r_{\alpha_{\mu-1}} = r_{\alpha_\mu} + d_\mu, \\ r_{\alpha_{\mu-2}} = r_{\alpha_\mu} + d_{\mu-1} + d_\mu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_{\alpha} \quad = r_{\alpha_\mu} + d_2 \quad + d_3 + \ldots + d_{\mu-1} + d_\mu. \end{array}\right.$$

Si les nombres r sont imaginaires, c'est sur la partie réelle que porte le calcul.

La conséquence que nous avons en vue est la suivante. Toutes les expressions

$$\begin{array}{l} \mathrm{F}(r + d_\mu), \\ \mathrm{F}(r + d_{\mu-1} + d_\mu), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{F}(r + d_2 + \ldots + d_{\mu-1} + d_\mu) \end{array}$$

s'annulent pour

$$r = r_{\alpha_\mu},$$

que nous représenterons seulement par r_α.

2° Nous prendrons les arbitraires φ_i^0 dont les valeurs proportionnelles interviennent seules dans le calcul, avec un facteur $r - r_\alpha$ élevé à une puissance nécessaire et suffisante pour que toutes les expressions φ_i^k restent finies et ne s'annulent pas toutes pour $r = r_\alpha$.

3° Enfin nous donnerons à r une des valeurs $r_1, r_2, \ldots, r_n$ qui satisfont à l'équation caractéristique, et nous choisirons les quantités φ_i^0 de manière à satisfaire aux équations (82_α).

Il est évident que les expressions y_i (81) ainsi déterminées satisferont aux équations (79), et que les séries φ_i seront absolument convergentes dans un certain domaine de l'origine, comme au n° 4 du Chapitre I.

Voici maintenant les résultats généraux du calcul ainsi préparé. Représentons par

$$f_i(y_1, \ldots, y_n) = -x\frac{dy_i}{dx} + \sum_j a_{ij} y_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{85}$$

les expressions qui, égalées à zéro, donnent les équations (79).

En supposant d'abord les lettres r et φ_i^0 indéterminées, nous aurons identiquement

$$f_i(x^r\varphi_1, \ldots, x^r\varphi_n) = x^r \sum_j (a_{ij}^0 - r\delta_{ij})\varphi_j^0. \tag{86}$$

Choisissons $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$, de sorte qu'aucune des quantités φ_i^k ne devienne infinie pour $r = r_\alpha$, et en outre de manière que

$$f_i(x^r\varphi_1, \ldots, x^r\varphi_n)$$

s'annule h fois pour $r = r_\alpha$, h étant un nombre entier quelconque. Nous devons avoir

$$\left[\frac{\partial^\lambda f_i}{\partial r^\lambda}\right]_{(r=r_\alpha)} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, h-1). \tag{87}$$

Mais

$$\frac{\partial^\lambda f_i}{\partial r^\lambda} = f_i\left(\frac{\partial^\lambda y_1}{\partial r^\lambda}, \ldots, \frac{\partial^\lambda y_n}{\partial r^\lambda}\right). \tag{88}$$

Nous voyons, par suite, que l'on peut former les h solutions suivantes du système (79)

$$y_i = \left[\frac{\partial^\lambda (x^r\varphi_i)}{\partial r^\lambda}\right]_{(r=r_\alpha)}$$

ou

$$y_i = x^{r_\alpha}\left[\frac{\partial^\lambda \varphi_i}{\partial r^\lambda} + \frac{\lambda}{1}\frac{\partial^{\lambda-1}\varphi_i}{\partial r^{\lambda-1}}\log x + \ldots + \binom{\lambda}{\lambda-1}\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\log^{\lambda-1} x + \varphi_i \log^\lambda x\right]_{(r=r_\alpha)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, h-1). \tag{89}$$

Les parenthèses de ces expressions, renfermant les dérivées de séries uniformément convergentes, auront pour les puissances de $\log x$ des coefficients, eux-mêmes uniformément convergents.

C'est avec ce programme général de calcul que nous allons construire un système fondamental de n solutions du système (79). Nous emploierons maintenant les notations de M. Horn, en les modifiant très légèrement.

85. Nous préparerons d'abord le système différentiel

$$(79)\qquad \begin{cases} x\dfrac{dy_\alpha}{dx} = \displaystyle\sum_\beta \mathrm{A}_{\alpha\beta} y_\beta & (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m), \\ \mathrm{A}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + x a'_{\alpha\beta} + x^2 a''_{\alpha\beta} + \ldots. \end{cases}$$

Multiplions ces équations par des constantes encore indéterminées $u_1, u_2, \ldots, u_m$ et ajoutons les résultats. Nous aurons une équation de la forme

$$(90)\qquad x\frac{d\sum_\alpha u_\alpha y_\alpha}{dx} = \sum_{\alpha\beta} \mathrm{A}_{\alpha\beta} u_\alpha y_\beta.$$

On peut ramener les deux formes bilinéaires

$$\sum_\alpha u_\alpha y_\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha\beta} a^0_{\alpha\beta} u_\alpha y_\beta$$

aux deux *formes canoniques* (*Théorie des diviseurs élémentaires*)

$$\sum_\alpha v_\alpha z_\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha\beta} b^0_{\alpha\beta} v_\alpha z_\beta.$$

Les substitutions employées sont de la forme

$$u_\alpha = \sum_\beta g_{\alpha\beta} v_\beta, \qquad y_\alpha = \sum_\beta h_{\alpha\beta} z_\beta,$$

ou encore

$$v_\beta = \sum_\alpha h_{\alpha\beta} u_\alpha, \qquad z_\beta = \sum_\alpha g_{\alpha\beta} y_\alpha,$$

à cause de la forme de l'expression

$$\sum_\alpha u_\alpha y_\alpha.$$

Or, les v étant indéterminés, ainsi que les u, on pourra transformer le système (79) en un autre

$$(91)\qquad x\frac{dz_\alpha}{dx} = \sum_\beta \mathrm{P}_{\alpha\beta} z_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m),$$

où l'on aura

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu} A_{\lambda\mu} g_{\lambda\alpha} h_{\mu\beta} = p_{\alpha\beta} + x p'_{\alpha\beta} + x^2 p''_{\alpha\beta} + \ldots.$$

Considérons maintenant l'équation caractéristique du nouveau système différentiel

$$P(p) = |a_{\alpha\beta} - p\,\delta_{\alpha\beta}| = (p_1 - p)\ldots(p_m - p) = 0.$$

Soit $p - p_\alpha$ un diviseur élémentaire simple de $P(p)$, on aura

$$p_{\alpha\alpha} = p_\alpha, \quad p_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, m),$$

et à ce diviseur correspondra l'équation

$$x \frac{dz_\alpha}{dx} = p_\alpha z_\alpha + x \sum_\beta p'_{\alpha\beta} z_\beta + \ldots.$$

Supposons ensuite que l'on ait

$$p_{\alpha'} = p_{\alpha''} = \ldots = p_{\alpha^{(e)}} = p_0$$

et que $(p - p_0)^e$ soit un diviseur multiple d'ordre e de $P(p)$, nous aurons

$$(92) \quad \begin{cases} p_{\alpha'\alpha'} = p_0, & p_{\alpha''\alpha''} = p_0, & \ldots, & p_{\alpha^{(e)}\alpha^{(e)}} = p_0, \\ p_{\alpha''\alpha'} = 1, & p_{\alpha'''\alpha''} = 1, & \ldots, & p_{\alpha^{(e)}\alpha^{(e-1)}} = 1, \end{cases}$$

et tous les autres $p_{\alpha\beta}$ seront nuls. Donc, au diviseur considéré correspondront les équations

$$(93) \quad \begin{cases} x \dfrac{dz_{\alpha'}}{dx} = p_0 z_{\alpha'} + \ldots, \\ x \dfrac{dz_{\alpha''}}{dx} = p_0 z_{\alpha''} + z_{\alpha'} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x \dfrac{dz_{\alpha^{(e)}}}{dx} = p_0 z_{\alpha^{(e)}} + z_{\alpha^{(e-1)}} + \ldots; \end{cases}$$

les parties des seconds membres remplacées par des points sont des expressions telles que

$$x \sum_\beta p'_{\alpha\beta} z_\beta + x^2 \sum_\beta p''_{\alpha\beta} z_\beta + \ldots.$$

Cette préparation des équations a pour résultat : 1° de simplifier les calculs qu'on aura à faire plus loin ; 2° de préciser le sens des indices $1, 2, \ldots, m$ qu'on attribue aux racines de l'équation caractéristique. Nous considérerons plus loin des groupes de quantités

$$p_{\lambda_1}, \quad p_{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad p_{\lambda_r},$$

dont la signification est dès maintenant précisée.

86. Nous considérerons plusieurs cas :

Premier cas. — *p_0 étant une racine de l'équation caractéristique* $P(p)=0$ *fournit r diviseurs élémentaires simples*

$$p - p_\lambda \qquad (\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$

du déterminant $P(p)$. *D'ailleurs, entre p_0 et toute autre racine qui ne lui serait pas égale, il n'existe pas de différence entière.*

Soit p_λ une quelconque des racines égales à p_0, nous pouvons poser

$$z_\alpha = x^p \zeta_\alpha(x) = x^p[(\zeta_\alpha)_0 + x(\zeta_\alpha)_1 + x^2(\zeta_\alpha)_2 + \ldots] \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$(94) \qquad (\zeta_\lambda)_0 = \varepsilon_\lambda, \qquad (\zeta_\alpha)_0 = 0 \qquad (\alpha \neq \lambda),$$

ε_λ étant une constante, ou une fonction entière de p qui ne s'annule pas pour $p = p_0$.

Soient ζ_α les séries calculées dans ces conditions, mais où p reste indéterminé, on aura, à cause des équations (86) et (93),

$$(95) \qquad \begin{cases} P_\lambda(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_n) = -\varepsilon_\lambda(p-p_0)x^p, \\ P_\alpha(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_n) = 0 \qquad (\alpha \neq \lambda), \end{cases}$$

et, par suite, si l'on pose

$$\zeta_\alpha^0(x)_\lambda = [\zeta_\alpha(x)_\lambda]_{(p=p_0)},$$

les éléments

$$(96) \qquad z_\alpha^\lambda = x^{p_0}\zeta_\alpha^0(x)_\lambda$$

constitueront une solution des équations (79).

Cette solution est régulière. De plus, pour $x = 0$, la valeur initiale de $\zeta_\lambda(x)_\lambda$ étant ε_λ, c'est-à-dire une valeur qui n'est pas nulle, *cette solution appartient à l'exposant p_0*.

En général, en employant le langage de M. Fuchs, nous disons que toute solution des équations (79) de la forme

$$y_i = x^\rho(\theta_i + \eta_i \log x + \ldots + \varphi_i \log^h x)$$

est de forme simplifiée, et appartient à l'exposant ρ, lorsque toutes les fonctions $\theta, \eta, \ldots, \varphi$ sont holomorphes dans le domaine de l'origine, et que l'une d'elles au moins ne s'annule pas pour $x = 0$.

L'équation (96) fournit r solutions appartenant à l'exposant p_0, lorsqu'on remplace λ par les indices successifs

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_r.$$

Ces r solutions sont linéairement indépendantes, car, si l'on avait

$$\sum_{\lambda} C_\lambda z_\alpha^\lambda = 0 \qquad (\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_r),$$

on en déduirait

$$\sum_{\lambda} C_\lambda \zeta_\alpha^0 (x)_\lambda = 0,$$

et, pour $x = 0$,

$$C_\lambda \varepsilon_\lambda = 0 \qquad (\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_r),$$

ce qui est impossible, à moins que les constantes C_λ ne soient toutes nulles.

Deuxième cas. — *Les racines $p_{\lambda^0}, \ldots, p_{\lambda^n}$ fournissent, d'une part, des groupes de $r^0, r^1, \ldots, r^n$ racines égales entre elles*

$$p_{\lambda_1^0} = p_{\lambda_2^0} = \ldots = p_{\lambda_{r^0}^0} = p_{\lambda^0} = p_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$p_{\lambda_1^n} = p_{\lambda_2^n} = \ldots = p_{\lambda_{r^n}^n} = p_{\lambda^n} = p_n,$$

et, d'autre part,

r^0 *diviseurs élémentaires simples* $p - p_0$ *de* $P(p)$,

r^1 » $p - p_1$,

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$,

r^n » $p - p_n$.

D'ailleurs, entre $p_0, p_1, \ldots, p_n$ et toute autre racine qui ne soit égale à aucune d'elles, il n'existe pas de différence entière. Enfin les différences

$$p_0 \quad - p_1 = d_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$p_{n-1} - p_n = d_n$$

sont des nombres entiers positifs.

Considérons un groupe quelconque correspondant à l'indice i, et posons

(97) $$(\zeta_{\lambda^i})_0 = \varepsilon_{\lambda^i}(p - p_i)^i, \qquad (\zeta_\alpha)_0 = 0 \qquad (\alpha \neq \lambda^i,\ \lambda^i = \lambda_1^i;\ \lambda_2^i;\ \ldots;\ \lambda_{r^i}^i);$$

nous aurons, en vertu des équations (86) et (93),

$$P_{\lambda^i}(x^p \zeta_1, \ldots, x^p \zeta_m) = -\varepsilon_{\lambda^i}(p - p_i)^{i+1} x^p,$$

$$P_\alpha(x^p \zeta_1, \ldots, x^p \zeta_m) = 0 \qquad (\alpha \neq \lambda^i).$$

En effet, le déterminant $P(p)$ a la forme spéciale

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & p_{\lambda_1^i} - p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & p_{\lambda_2^i} - p & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & p_{\lambda_{\rho_i}^i} - p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

et l'expression qui entre dans les équations (86) se réduit, à cause des hypothèses (97), au seul terme

$$(p_{\lambda_i^i} - p)\,\varepsilon_{\lambda^i}(p - p_i)^i,$$

ou encore à

$$-\varepsilon_{\lambda^i}(p - p_i)^{i+1}.$$

Les $i+1$ expressions

$$(98) \qquad \zeta_\alpha^{\lambda^i, h} = \left[\frac{\partial^h (x^p \zeta_\alpha)}{\partial p^h}\right]_{p^i} \qquad (h = 0, 1, \ldots, i)$$

seront des solutions régulières du système différentiel (79).

Mais les formules (82) (excepté la première) conduisent à l'expression

$$(\zeta_\alpha)_\nu = \frac{Q_\alpha^{\nu, \lambda^i}(p)}{Q(p+1)\ldots Q(p+\nu)}\,\varepsilon_{\lambda^i}(p - p_i)^i,$$

où

$$Q(p) = (p - p_0)\ldots(p - p_n)$$

et où $Q(p)$ est une fraction rationnelle en p ne devenant pas infinie pour $p = p_0$, $p_1, \ldots, p_n$.

Par suite, pour $p = p_i$,

$(\zeta_\alpha)_0, \ldots, (\zeta_\alpha)_{d_i - 1}$ s'annulent au degré i par rapport à p,

$(\zeta_\alpha)_{d_i}, \ldots, (\zeta_\alpha)_{d_i + d_{i-1} - 1}$ s'annulent au degré $i - 1$,

. . . . ,

$(\zeta_\alpha)_{d_i + \ldots + d_2}, \ldots, (\zeta_\alpha)_{d_i + \ldots + d_1 - 1}$ s'annulent au degré 1.

On peut alors poser

$$[\zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}]_{p^i} = x^{d_i + \ldots + d_1}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda^i},$$

$$\left[\frac{\partial \zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}}{\partial p}\right]_{p^i} = x^{d_i + \ldots + d_2}\zeta_\alpha^1(x)_{\lambda^i},$$

. . . . ,

$$\left[\frac{\partial^i \zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}}{(\partial p^i)}\right]_{p^i} = \zeta_\alpha^i(x)_{\lambda^i}.$$

Mais, la valeur initiale de $\zeta^i_{\lambda^i}(x)_{\lambda^i}$ étant égale à

$$\left[\frac{\partial^i[\varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^i]}{(\partial p)^i}\right]_{p^i}$$

n'est pas nulle. On en conclut que, dans les $i+1$ expressions (98), la dernière

$$z_\alpha^{\lambda^i, i}$$

ou simplement

$$z_\alpha^{\lambda^i}$$

appartient à l'exposant p_i.

Cette solution est de la forme

$$z_\alpha^{\lambda^i} = x^{p_i}\zeta_\alpha^i(x)_{\lambda^i} + \binom{i}{1} x^{p_{i-1}}\zeta_\alpha^{i-1}(x)_{\lambda^i}\log x + \ldots + \binom{i}{i-1} x^{p_1}\zeta_\alpha^1(x)_{\lambda^i}\log^{i-1}x + x^{p_0}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda^i}\log^i x.$$

Ce sera la seule que nous considérerons pour la valeur λ^i.

On a donc le Tableau suivant de solutions, dans le développement desquelles tous les termes sont séparément de forme simplifiée,

$$(99)\quad \begin{cases} z_\alpha^{\lambda^0} = x^{p_0}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda^0}, \\ z_\alpha^{\lambda^1} = x^{p_1}\zeta_\alpha^1(x)_{\lambda^1} + x^{p_0}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda^1}\log x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_\alpha^{\lambda^n} = x^{p_n}\zeta_\alpha^n(x)_{\lambda^n} + x^{p_{n-1}}\zeta_\alpha^{n-1}(x)_{\lambda^n}\log x + \ldots + x^{p_0}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda^n}\log^n x. \end{cases}$$

Dans ce Tableau, il y a

$$r^0 + r^1 + \ldots + r^n$$

solutions.

Les i séries $\zeta_\alpha^k(x)_{\lambda^i}$ qui entrent dans $z_\alpha^{\lambda^i}$ peuvent s'annuler de différentes façons, de sorte que tout ou partie des logarithmes peuvent disparaître.

Les solutions (99) sont linéairement indépendantes. Car, si l'on avait la relation

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{\lambda^i} C_{\lambda^i} z_\alpha^{\lambda^i} = 0,$$

on en déduirait

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{\lambda^i} C_{\lambda^i} x^{p_i}\zeta_\alpha^i(x)_{\lambda^i} = 0.$$

En divisant par x^{p_n}, et en faisant ensuite $x=0$, on aurait

$$\sum_{\lambda^n} C_{\lambda^n}\varepsilon_{\lambda^n} = 0 \qquad (\lambda^n = \lambda_1^n, \ldots, \lambda_{r^n}^n),$$

ce qui est impossible si les C_{λ^n} ne sont pas tous nuls. De même les $C_{\lambda^{n-1}}$ seront tous nuls, etc.

TROISIÈME CAS. — *La racine p_0 de l'équation caractéristique fournit les diviseurs élémentaires*

$$(p-p_0)^{e_{\lambda_1}}, \quad \ldots, \quad (p-p_0)^{e_{\lambda_r}}$$

du déterminant $P(p)$. *D'ailleurs, entre p_0 et toute racine qui ne lui serait pas égale, il n'existe pas de différence entière.*

Au diviseur élémentaire $(p-p_0)^{e_\lambda}$ correspondent par exemple les équations

$$(100)\qquad \begin{cases} x\dfrac{dz_{\alpha'}}{dx} = p_0 z_{\alpha'} + \ldots, \\ x\dfrac{dx_{\alpha''}}{dx} = p_0 z_{\alpha''} + z_{\alpha'} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x\dfrac{dz_{\alpha^{(e_\lambda)}}}{dx} = p_0 z_{\alpha^{(e_\lambda)}} + z_{\alpha^{(e_\lambda)}} + \ldots. \end{cases}$$

Posons, en conséquence,

$$(101)\qquad \begin{cases} (\zeta_{\alpha'})_0 = \varepsilon_\lambda (p-p_0)^{e_\lambda - 1}, \\ (\zeta_{\alpha''})_0 = \varepsilon_\lambda (p-p_0)^{e_\lambda - 2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (\zeta_{\alpha^{(e_\lambda)}})_0 = \varepsilon_\lambda, \end{cases}$$

ε_λ étant une constante, et prenons nulles toutes les autres quantités $(\zeta_\alpha)_0$. Soient $\zeta_\alpha = \zeta_\alpha(x)_\lambda$ les séries déterminées dans ces conditions.

Nous aurons les relations

$$(102)\qquad \begin{cases} P_{\alpha'}(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = -\varepsilon_\lambda (p-p_0)^{e_\lambda}, \\ P_\alpha(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = 0 \qquad (\alpha \neq \alpha'). \end{cases}$$

En effet, on a, par exemple, identiquement

$$(p_0-p)(\zeta_{\alpha''})_0 + (\zeta_{\alpha'})_0 = 0.$$

Posons alors

$$(103)\qquad \begin{cases} [\zeta_\alpha(x)_\lambda]_{p_0} = \zeta_\alpha^0(x)_\lambda, \\ \left[\dfrac{\partial \zeta_\alpha(x)_\lambda}{\partial p}\right]_{p_0} = \zeta_\alpha^1(x)_\lambda, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots, \\ \left[\dfrac{\partial^{e_\lambda - 1}\zeta_\alpha(x)_\lambda}{(\partial p)^{e_\lambda - 1}}\right]_{p_0} = \zeta_\alpha^{e_\lambda - 1}(x)_\lambda. \end{cases}$$

Les seconds membres ne seront pas tous nuls pour $x=0$. En effet, d'après

les formules (101),

$$\zeta_{\alpha_1}^{0},\quad \zeta_{\alpha_2}^{1},\quad \ldots,\quad \zeta_{\alpha_{e_\lambda}}^{e_\lambda-1}$$

se réduisent à ε_λ pour $x = 0$.

En conséquence, on peut former le groupe de e_λ solutions

$$(104)\quad \begin{cases} z_\alpha^{\lambda,0} = x^{p_0}\zeta_\alpha^0(x)_\lambda, \\ z_\alpha^{\lambda,1} = x^{p_0}[\zeta_\alpha^1(x)_\lambda + \zeta_\alpha^0(x)_\lambda \log x], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ z_\alpha^{\lambda,e_\lambda-1} = x^{p_0}\left[\zeta_\alpha^{e_\lambda-1}(x)_\lambda + \binom{e_\lambda-1}{1}\zeta_\alpha^{e_\lambda-2}(x)_\lambda \log x + \ldots + \zeta_\alpha^0(x)_\lambda \log^{e_\lambda-1} x\right], \end{cases}$$

appartenant toutes à l'exposant p_0.

On remarquera que la dernière relation fait connaître toutes les autres, puisqu'elle renferme tous leurs coefficients.

Les solutions (104) sont linéairement indépendantes; car, si l'on avait la relation

$$\sum_\lambda \left(C_{\lambda,0}\, z_\alpha^{\lambda,0} + \ldots + C_{\lambda,e_\lambda-1}\, z_\alpha^{\lambda,e-1}\right) = 0,$$

en divisant par x^{p_0} les diverses équations qui s'obtiennent en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de $\log x$, on reconnaîtrait qu'en faisant $x = 0$ on doit avoir

$$C_{\lambda,h} = 0.$$

Quatrième cas. — C'est le cas général.

Les racines $p_0, p_1, \ldots, p_n$ de l'équation caractéristique fournissent les diviseurs élémentaires

$$\begin{array}{ll} (p-p_0)^{e_{\lambda^0}} & (\lambda^0 = \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{r_0}^0), \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots, \\ (p-p_n)^{e_{\lambda^n}} & (\lambda^n = \lambda_1^n, \ldots, \lambda_{r_n}^n). \end{array}$$

D'ailleurs, entre ces racines et toute autre racine qui ne serait pas égale à l'une d'elles, il n'existe pas de différence entière. Enfin les différences

$$\begin{array}{l} p_0 - p_1 = d_1, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ p_{n-1} - p_n = d_n \end{array}$$

sont des nombres entiers positifs, de sorte que l'on a

$$(105)\quad \begin{cases} p_{n-1} = p_n + d_n, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ p_0 = p_n + d_n + \ldots + d_1. \end{cases}$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{e_{\lambda^i}}$ les indices correspondant au diviseur élémentaire

$(p-p_i)^{e_{\lambda^i}}$ dans le système d'équations différentielles en z. Posons

$$(106)\quad \begin{cases} (\zeta_{\alpha_1})_0 = \varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{e^0+\ldots+e^{i-1}+e_{\lambda^i}-1}, \\ (\zeta_{\alpha_2})_0 = \varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{e^0+\ldots+e^{i-1}+e_{\lambda^i}-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (\zeta_{\alpha_{e_{\lambda^i}-1}})_0 = \varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{e^0+\ldots+e^{i-1}+1}, \\ (\zeta_{\alpha_{e_{\lambda^i}}})_0 = \varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{e^0+\ldots+e^{i-1}}, \end{cases}$$

où ε_{λ^i} est une constante ou une fonction de p qui ne s'annule pas pour $p=p_i$. On prend nuls tous les autres $(\zeta_\alpha)_0$. Soient ζ_α les séries $\zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}$ déterminées dans ces conditions, il vient

$$\begin{gathered} P_{\alpha_1}(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = -\varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{e^0+\ldots+e^{i-1}+e_{\lambda^i}}x^p, \\ P_\alpha(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = 0 \qquad (\alpha \neq \alpha_1). \end{gathered}$$

Si l'on prend pour e^k le plus grand des nombres e_{λ^k}, et si l'on pose

$$(107)\quad \begin{cases} l^0 = e^0, \\ l^1 = e^0+e^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l^{i-1} = e^0+\ldots+e^{i-1}, \\ l_{\lambda^i} = e^0+\ldots+e^{i-1}+e_{\lambda^i}, \end{cases}$$

on obtiendra les solutions

$$(108)\quad \begin{cases} z_\alpha = \left[\dfrac{\partial^{\mu^0}(x^p\zeta_\alpha)}{(\partial p)^{\mu^0}}\right]_{p_i} & (\mu^0 = 0, \ldots, l^0-1), \\ z_\alpha = \left[\dfrac{\partial^{\mu^1}(x^p\zeta_\alpha)}{(\partial p)^{\mu^1}}\right]_{p_i} & (\mu^1 = l^0, \ldots, l^1-1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_\alpha = \left[\dfrac{\partial^{\mu^{i-1}}(x_p\zeta_\alpha)}{(\partial p)^{\mu^{i-1}}}\right]_{p_i} & (\mu^{i-1} = l^{i-2}, \ldots, l^{i-1}+1), \\ z_\alpha = \left[\dfrac{\partial^{\mu_{\lambda^i}}(x^p\zeta_\alpha)}{(\partial p)^{\mu_{\lambda^i}}}\right]_{p_i} & (\mu_{\lambda^i} = l^{i-1}, \ldots, l_{\lambda^i}-1). \end{cases}$$

Ensuite les formules générales (82) (excepté la première) donneront

$$(\zeta_\alpha)_\nu = \sum_{h=1}^{h=e_{\lambda^i}} \frac{Q^\nu_{\alpha\alpha_h}(p).(p-p_i)^{h-1}}{Q(p+1)\ldots Q(p+\nu)}\varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{l^{i-1}},$$

où

$$Q(p) = (p-p_0)^{e^0}(p-p_1)^{e^1}\ldots(p-p)^{e^n},$$

et où $Q(p)$ est une fonction rationnelle de p, qui ne s'annule pas pour $p=p_0$, $p_1, \ldots, p_n$.

Par conséquent, pour $p=p_i$,

$(\zeta_\alpha)_0, \ldots$	$(\zeta_\alpha)_{d_i-1}$	s'annulent au degré	l^{i-1},
$(\zeta_\alpha)_{d_i}, \ldots$	$(\zeta_\alpha)_{d_i+d_{i-1}-1}$	»	l^{i-2},
....	....	....	.......,
$(\zeta_\alpha)_{d_i+\ldots+d_3}, \ldots,$	$(\zeta_\alpha)_{d_i+\ldots+d_2-1}$	»	l^1,
$(\zeta_\alpha)_{d_i+\ldots+d_2}, \ldots,$	$(\zeta_\alpha)_{d_i+\ldots+d_1-1}$	»	l^0,

et l'on peut écrire

$$(109)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^{\mu^0}\zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}}{(\partial p)^{\mu^0}}\right]_{p_i} = x^{d_i+\ldots+d_1}\zeta_\alpha^{0,\rho^0}(x)_{\lambda^i},\\
&\left[\frac{\partial^{\mu^1}\zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}}{(\partial p)^{\mu^1}}\right]_{p_i} = x^{d_i+\ldots+d_2}\zeta_\alpha^{1,\rho^1}(x)_{\lambda^i},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\left[\frac{\partial^{\mu_{\lambda^i}}\zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}}{(\partial p)^{\mu_{\lambda^i}}}\right]_{p_i} = \zeta_\alpha^{\rho_{\lambda^i}}(x)_{\lambda^i},
\end{aligned}\right.$$

où l'on a

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= \rho^0 &&= 0, \quad \ldots, \quad e^0 - 1,\\
\mu^1 - l^0 &= \rho^1 &&= 0, \quad \ldots, \quad e^1 - 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mu^{i-1} - l^{i-2} &= \rho^{i-1} &&= 0, \quad \ldots, \quad e^{i-1} - 1,\\
\mu_{\lambda^i} - l^{i-1} &= \rho_{\lambda^i} &&= 0, \quad \ldots, \quad e_{\lambda^i} - 1.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi e_{λ^i} solutions

$$z_\alpha = \left[\frac{\partial^{\mu_{\lambda^i}}(x^p\zeta_\alpha)}{(\partial p)^{\mu_{\lambda^i}}}\right]_{p_i}$$

ou

$$(110)\quad z_\alpha = x^{p_i}\left\{\left[\frac{\partial^{\mu_{\lambda^i}}\zeta_\alpha}{(\partial p)^{\mu_{\lambda^i}}}\right]_{p_i} + \binom{\mu_{\lambda^i}}{1}\left[\frac{\partial^{\mu_{\lambda^i}-1}\zeta_\alpha}{(\partial p)^{\mu_{\lambda^i}-1}}\right]_{p_i}\log x + \ldots + \binom{\mu_{\lambda^i}}{\mu_{\lambda^i}}(\zeta_\alpha)_{p_i}\log^{\mu_{\lambda^i}} x\right\}$$
$$(\mu_{\lambda^i} = l^{i-1}, \ldots, l_{\lambda^i} - 1),$$

appartenant à l'exposant p_i.

Il suffit de connaître la dernière de ces solutions pour connaître toutes les autres, c'est-à-dire celle qui correspond à $\mu_{\lambda^i} = l_{\lambda^i} - 1$. Pour avoir leurs expressions développées, posons

$$(111)\quad \left\{\begin{aligned}
Z_\alpha(x)_{\lambda^i} &= \zeta_\alpha^{e_{\lambda^i}-1}(x)_{\lambda^i} + \binom{l_{\lambda^i}-1}{1}\zeta_\alpha^{e_{\lambda^i}-2}(x)_{\lambda^i}\log x + \ldots\\
&\quad + \binom{l_{\lambda^i}-1}{e_{\lambda^i}-1}\zeta_\alpha^{0}(x)_{\lambda^i}\log^{e_{\lambda^i}-1} x,\\
Z_\alpha^{i-1}(x)_{\lambda^i} &= \binom{l_{\lambda^i}-1}{e_{\lambda^i}}\zeta_\alpha^{i-1,e^{i-1}-1}(x)_{\lambda^i}\\
&\quad + \binom{l_{\lambda^i}-1}{e_{\lambda^i}+1}\zeta_\alpha^{i-1,e^{i-1}-2}(x)_{\lambda^i}\log x\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad + \binom{l_{\lambda^i}-1}{e^{i-1}+e_{\lambda^i}-1}\zeta_\alpha^{i-1,0}(x)_{\lambda^i}\log^{e^{i-1}-1} x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Z_\alpha^{0}(x)_{\lambda^i} &= \binom{l_{\lambda^i}-1}{e^1+\ldots+e_{\lambda^i}}\zeta_\alpha^{0,e^0-1}(x)_{\lambda^i}\\
&\quad + \binom{l_{\lambda^i}-1}{e^1+\ldots+e_{\lambda^i}+1}\zeta_\alpha^{0,e^0-2}(x)_{\lambda^i}\log x\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad + \binom{l_{\lambda^i}-1}{e^0+\ldots+e_{\lambda^i}-1}\zeta_\alpha^{0,0}(x)_{\lambda^i}\log^{e^0-1} x.
\end{aligned}\right.$$

Les valeurs initiales de

$$\zeta_{\alpha_{e_{\lambda^i}}}^{e_{\lambda^i}-1}(x)_{\lambda^i}, \quad \ldots, \quad \zeta_{\alpha_1}^{0}(x)_{\lambda^i}$$

n'étant pas nulles, les logarithmes ne disparaîtront pas de ces formules.

Les solutions cherchées sont enfin

$$(112)\quad \left\{\begin{array}{l} z_\alpha^{\lambda^0} = x^{p_0} Z_\alpha(x)_{\lambda^0}, \\ z_\alpha^{\lambda^1} = x^{p_1} Z_\alpha(x)_{\lambda^1} + x^{p_0} Z_\alpha^0(x)_{\lambda^1} \log^{e_{\lambda^1}} x, \\ z_\alpha^{\lambda^2} = x^{p_2} Z_\alpha(x)_{\lambda^2} + x^{p_1} Z_\alpha^1(x)_{\lambda^2} \log^{e_{\lambda^2}} x + x^{p_0} Z_\alpha^0(x)_{\lambda^2} \log^{e^1+e_{\lambda^2}} x, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_\alpha^{\lambda^n} = \quad x^{p_n} \; Z_\alpha \quad (x)_{\lambda^n} \\ \qquad + x^{p_{n-1}} Z_\alpha^{n-1}(x)_{\lambda^n} \log^{e_{\lambda^n}} x \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad + x^{p_0} \; Z_\alpha^0 \quad (x)_{\lambda^n} \log^{e^1+\ldots+e_{\lambda^n}} x \qquad (\lambda^0 = \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{r^0}^0; \ldots; \lambda^n = \lambda_1^n, \ldots, \lambda_{r^n}^n. \end{array}\right.$$

Les degrés des fonctions Z en $\log x$ sont respectivement

$$e_{\lambda^i-1}, \quad e^{i-1}-1, \quad \ldots, \quad e^0-1.$$

Les solutions précédentes sont linéairement indépendantes, comme on pourrait le démontrer par le même procédé qui a servi dans les autres cas.

87. Il ne reste plus à démontrer qu'une seule proposition : *Toutes les solutions calculées forment un système fondamental.*

Après ce qu'on a déjà vu, il suffit de faire voir qu'*il ne peut exister aucun groupe de n relations identiques de la forme*

$$(113)\qquad C_1 A_{i1} + \ldots + C_\mu A_{i\mu} = 0$$

entre des solutions formant l'ensemble A_{i1} *appartenant à un exposant* r_1, *des solutions formant l'ensemble* A_{i2}, *appartenant à l'exposant* $r_2, \ldots,$ *des solutions formant l'ensemble* $A_{i\mu}$ *appartenant à l'exposant* r_μ, les C étant d'ailleurs des constantes, et les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ n'ayant entre eux aucune différence entière, *à moins que séparément on n'ait*

$$A_{i1} = 0, \qquad \ldots, \qquad A_{i\mu} = 0.$$

Mais on sait que chacune de ces conditions particulières est impossible dans le problème d'intégration qui nous a occupé. Donc on pourra, après avoir démontré la proposition qu'on vient d'énoncer, affirmer que les solutions précédemment obtenues forment un système fondamental.

Faisons, en effet, tourner x autour de l'origine un nombre $\mu - 1$ de fois, et désignons par

$$B_{i1}^{\eta_1}, \quad B_{i2}^{\eta_2}, \quad \ldots, \quad B_{i\mu}^{\eta_\mu}$$

les coefficients des plus hautes puissances de $\log x$ dans les groupements $A_{i1}, \ldots, A_{i\mu}$. Nous aurons

$$\begin{array}{l} C_1 A_{i1} + \ldots + \qquad C_\mu A_{i\mu} = 0, \\ \omega_1 C_1 A_{i1} + \ldots + \quad \omega_\mu C_\mu A_{i\mu} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_1^{\mu-1} C_1 A_{i1} + \ldots + \omega_\mu^{\mu-1} C_\mu A_{i\mu} = 0, \end{array}$$

$$(\omega = e^{2\pi r\sqrt{-1}}).$$

Éliminant les C entre ces équations, on aura une équation qu'on pourra ordonner en $\log x$ et qui aura la forme

$$P_{i1} + P_{i2} \log x + \ldots + P_{i\eta} \log^\eta x = 0.$$

Les coefficients de cette équation seront d'ailleurs uniformes et, comme cette équation étant algébrique en $\log x$ ne peut admettre une infinité de racines, on devra avoir séparément

$$P_{i\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \eta)$$

En particulier, on aura

$$P_{i\eta} = 0$$

ou encore

$$(114) \qquad P_{i\eta} = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \omega_1 & \ldots & \omega_\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{\mu-1} & \ldots & \omega_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix} B_{i1}^{\eta_1} \ldots B_{i\mu}^{\eta_\mu} = 0.$$

Comme aucun des facteurs de $P_{i\eta}$ n'est nul, l'hypothèse faite est inadmissible, et le théorème qu'on avait en vue est démontré.

CHAPITRE V.

DES SYSTÈMES RÉGULIERS.

---

88. Nous avons vu que les systèmes de la forme (B) ou (79)

$$x\frac{dy_i}{dx} = \sum_j a_{ij} y_j$$

(Chap. IV, nos 83 et suivants), où les a sont des fonctions holomorphes dans le domaine de l'origine, ont toutes leurs solutions régulières, c'est-à-dire que les éléments de chaque solution demeurent finis dans le domaine de l'origine, quand on les a préalablement multipliés par une puissance convenable de x.

Les systèmes précédents ne sont pas les seuls à être ce que nous appellerons maintenant des *systèmes réguliers*. En effet, si l'on pose

$$y_i = x^{h_i} z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et, par suite,

$$\frac{dy_i}{dx} = x^{h_i}\left(\frac{dz_i}{dx} + \frac{h_i}{x} z_i\right),$$

le système différentiel (79) devient

$$\frac{dz_1}{dx} = \frac{a_{11} - h_1}{x} z_1 + \frac{a_{12}}{x^{h_1 - h_2 + 1}} z_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{x^{h_1 - h_n + 1}} z_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{dz_n}{dx} = \frac{a_{n1}}{x^{h_n - h_1 + 1}} z_1 + \frac{a_{12}}{x^{h_n - h_2 + 1}} z_2 + \ldots + \frac{a_{nn} - h_n}{x} z_n,$$

et, sous cette nouvelle forme, le système est encore régulier.

Le système

$$\frac{dy_1}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} + \alpha_{1\,1}^0 + \alpha_{1\,1}^1 x + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \alpha_{1\,2}^0 + \alpha_{1\,2}^1 x + \ldots\right) y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \alpha_{2\,1}^0 + \alpha_{2\,1}^1 x + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} + \alpha_{2\,2}^0 + \alpha_{2\,2}^1 x + \ldots\right) y_2,$$

qui ne rentre dans aucune des deux formes précédentes, est aussi régulier. Car, si l'on pose

$$z_1 = y_1 + y_2, \qquad z_2 = y_1 - y_2,$$

on aura, pour déterminer z_1 et z_2, un système différentiel de la forme

$$\frac{dz_1}{dx} = \left(\frac{1}{x} + \ldots\right) z_1 + \left(-\frac{2}{x^2} + \ldots\right) z_2,$$
$$\frac{dz_2}{dx} = \left(-\frac{1}{x} + \ldots\right) \frac{z_1 + z_2}{2} + \left(\frac{1}{x} + \ldots\right) \frac{z_1 - z_2}{2},$$

et, si l'on remplace z_2 par $x z_2$, on obtiendra un système de la forme (B).

On voit donc qu'il y a une grande variété de systèmes réguliers. Nous allons montrer que l'on peut tous les rattacher à ceux d'entre eux qui ont la forme (79) ou (B), et que, pour cette raison, nous appellerons des *systèmes réguliers canoniques*.

89. Soit

$$(115) \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

un système d'équations différentielles linéaires et homogènes, telles que, dans le domaine de l'origine, les coefficients a soient uniformes et continus, sauf à l'origine, et que les éléments des solutions multipliés par des puissances convenables de x restent finis.

Pour le point $x = \infty$, on multiplierait les éléments des solutions par des puissances convenables de $\frac{1}{x}$.

Les solutions seront, comme nous allons le rappeler, formées de la manière suivante.

Nous avons vu au Chapitre IV (nos 80 et suivants) que l'on peut former un système fondamental de solutions du système (115), tel que ces solutions se partagent en groupes distincts dont les éléments prennent les formes

$$(116) \qquad \left\{\begin{array}{l} y_{i1} = x^r \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f_i(u), \\ y_{i2} = x^r \omega^{m-2} \Delta_{m-2} f_i(u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{i,m-k} = x^r \omega^k \Delta_k f_i(u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{im} = x^r f_i(u), \end{array}\right.$$

où l'on a

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$(117) \qquad \omega = e^{2\pi r \sqrt{-1}},$$
$$(118) \qquad u = \frac{\log x}{2\pi\sqrt{-1}},$$

où $\Delta_k f(u)$ représente la différence d'ordre k de $f(u)$ par rapport à l'accroissement 1 de u, et enfin où ω est une racine de l'équation fondamentale en ω, fournissant un diviseur élémentaire de degré m.

On sait que u augmente de 1 quand x fait le tour de l'origine.

L'équation (117) ne détermine r qu'à un nombre entier quelconque près.

Les polynomes en u, $f_i(u)$ fournissent des différences $\Delta_k f_i(u)$ qui sont elles-mêmes des polynomes, et y_{i1} est la seule solution où n'entre pas forcément u, et par suite $\log x$.

Ces principes étant rappelés, formons le système différentiel caractérisé par des relations de la forme (116), mais où les solutions sont régulières. On supposera que toutes les valeurs de r sont déterminées de manière que les coefficients de u dans les polynomes $f_i(u)$ soient holomorphes, ce qui sera suffisant pour la régularité.

Or, on sait qu'on a (Chap. III, n° 63)

$$\mathrm{D}a_{ij} = \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & \dfrac{dy_{i1}}{dx} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1n} & \cdots & \dfrac{dy_{in}}{dx} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

D étant le déterminant du système fondamental de solutions, et a_{ij} un coefficient quelconque des équations (115). Il résulte de la forme de a_{ij} que ce coefficient est régulier comme les éléments y_{ij} et leurs dérivées $\frac{dy_{ij}}{dx}$. On peut donc remplacer a_{ij} par $\frac{a_{ij}}{x^{\alpha_{ij}}}$ dans les équations (115), et dire que tous les systèmes réguliers ont la forme

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_j \frac{a_{ij}}{x^{\alpha_{ij}}} y_j, \tag{119}$$

où les coefficients a_{ij} sont holomorphes dans le domaine de l'origine.

Étudions aussi le déterminant

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1n} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Le système fondamental de solutions de la forme (116) peut être choisi tel que, si l'on pose

$$y_{ij} = x^r \mathrm{P}_{ij}(\log x),$$

P étant la caractéristique d'un polynome, les coefficients de ce polynome restent

holomorphes dans le domaine de l'origine. Dans ces conditions on pourra poser

$$D = x^{R}\,\Pi(\log x),$$

Π désignant aussi un polynome à coefficients holomorphes. Si la variable x fait le tour de l'origine, on sait qu'on aura

$$D_1 = CD,$$

où D_1 sera la nouvelle valeur de D, et C un déterminant de constantes. Donc, si l'on pose

$$C = e^{2\pi\rho\sqrt{-1}},$$

le produit $Dx^{-\rho}$ sera uniforme dans le domaine de l'origine, et l'on pourra poser simplement

$$D = x^{\rho}\,\Psi(x),$$

où $\Psi(x)$ sera holomorphe.

Cela suffit pour que les logarithmes disparaissent de $\Pi(\log x)$. Posons, en effet,

$$\Pi(\log x) = p_0 + p_1 \log x + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x,$$

$p_0, p_1, \ldots, p_\lambda$ représentant des fonctions holomorphes, et identifions les deux formes de D. Nous aurons

$$(120) \qquad x^{\rho}\,\Psi(x) = x^{R}(p_0 + p_1 \log x + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x).$$

Faisons tourner la variable x autour de l'origine, nous aurons

$$e^{2\pi\rho\sqrt{-1}} x^{\rho}\,\Psi(x) = e^{2\pi R\sqrt{-1}} x^{R}\left[p_0 + p_1(\log x + 2\pi\sqrt{-1}) + \ldots + p_\lambda(\log x + 2\pi\sqrt{-1})^\lambda\right],$$

ou, en faisant $e^{2\pi R\sqrt{-1}} = C_1$,

$$(121) \quad Cx^{\rho}\,\Psi(x) = C_1 x^{R}\left[p_0 + p_1 \log x + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x + q_0 + q_1 \log x + \ldots + q_{\lambda-1} \log^{\lambda-1} x\right],$$

en appelant $q_0, q_1, \ldots, q_{\lambda-1}$ des fonctions holomorphes.

Des équations (120) et (121), on tire

$$C(p_0 + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x) = C_1(p_0 + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x + q_0 + \ldots + q_{\lambda-1} \log^{\lambda-1} x).$$

C'est une équation algébrique en $\log x$, ce qui ne peut exister, car une telle équation aurait une infinité de racines distinctes. Il faut donc que ses coefficients

soient identiquement nuls, ce qui donnera d'abord

$$Cp_\lambda = C_1 p_\lambda.$$

Puisque p_λ n'est pas nul, il faut que l'on ait $C = C_1$, et, par suite, ρ et R ne diffèrent que par un nombre entier.

La relation

$$q_0 + q_1 \log x + \ldots + q_{\lambda-1} \log^{\lambda-1} x = 0$$

entraînera ensuite

$$q_{\lambda-1} = 0, \qquad q_{\lambda-2} = 0, \qquad \ldots, \qquad q_1 = 0, \qquad q_0 = 0.$$

Il est facile de voir que les p et les q sont reliés par des relations telles que l'on aura aussi

$$p_\lambda = 0, \qquad p_{\lambda-1} = 0, \qquad \ldots, \qquad p_1 = 0.$$

Donc l'expression $x^\rho\,\Psi(x)$ qui se réduit à $x^{\mathrm{R}} p_0$ *ne contient pas de logarithmes.*

Le déterminant D est lié aux coefficients des équations (115) par la relation de Liouville

$$D = C e^{\int (a_{11} + \ldots + a_{nn}) dx}.$$

Il faut alors que cette expression soit aussi régulière. Pour trouver les conditions de régularité, posons

$$a_{11} + \ldots + a_{nn} = \frac{A_\alpha}{x^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} + \ldots,$$

α étant plus grand que l'unité, et nous aurons

$$\int (a_{11} + \ldots + a_{nn})\, dx = \frac{A_\alpha}{(1-\alpha) x^{\alpha-1}} + \ldots + K \log x + \ldots + L_p x^p + \ldots.$$

D'où nous tirerons

$$D = C e^{\frac{A_\alpha}{(1-\alpha) x^{\alpha-1}}} \times x^k \times \theta(x),$$

où $\theta(x)$ est une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine.

Il est évidemment nécessaire et suffisant que α ne dépasse pas l'unité pour que l'expression de D soit régulière. Donc, *si* D *est le déterminant d'un système fondamental de solutions d'équations régulières de la forme* (115), *l'expression* $a_{11} + \ldots + a_{nn}$, *multipliée par* x, *est holomorphe.*

90. On peut remplacer le système

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_j \frac{a_{ij}}{x^{\alpha_{ij}}} y_i,$$

par un système de même forme en posant, pour *une* valeur de i,

$$y_i = x^k z, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy_i}{dx} = x^k\left(\frac{dz}{dx} + \frac{k}{x}z\right). \tag{122}$$

On obtiendra les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_j}{dx} &= \frac{a_{j1}}{x^{\alpha_{j1}}} y_1 + \ldots + \frac{a_{ji}}{x^{\alpha_{ji}-k}} z + \ldots + \frac{a_{jn}}{x^{\alpha_{jn}}} y_n, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{a_{i1}}{x^{\alpha_{i1}+k}} y_1 + \ldots + \left(\frac{a_{ii}}{x^{\alpha_{ii}}} - \frac{k}{x}\right) z + \ldots + \frac{a_{in}}{x^{\alpha_{in}+k}} y_n \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n),$$

c'est-à-dire que, si l'on considère le Tableau des exposants

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1i} & \ldots & \alpha_{1n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \alpha_{i1} & \ldots & \alpha_{ii} & \ldots & \alpha_{in}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{ni} & \ldots & \alpha_{nn}, \end{matrix}$$

on peut, par une substitution de la forme (122), *modifier la colonne d'indice i et la ligne d'indice i, de sorte que, si tous les nombres de la colonne augmentent ou diminuent du nombre k, tous les nombres de la ligne diminuent ou augmentent du même nombre k. Seul le nombre* α_{ii} *est invariable s'il est positif. Dans le cas contraire, il faut tenir compte du terme introduit* $-\frac{k}{x}$ *dans le coefficient de z.*

91. Ecrivons les équations (119) sous la forme

$$x^{1+\alpha_i} \frac{dy_i}{dx} = \sum_j a_{ij} y_j \tag{123}$$

Si les coefficients a_{ij} sont holomorphes dans le domaine de l'origine, et si tous les nombres entiers α_i sont nuls ou négatifs, le système est régulier.

Nous n'aurons donc de difficultés à rencontrer que dans la recherche des systèmes réguliers où l'un au moins des nombres α_i est positif, en même temps que toutes les valeurs initiales correspondantes a^0_{ij} ($j = 1, 2, \ldots, n$) ne sont pas nulles à la fois. Nous nous placerons dans cette hypothèse.

Nous supposerons d'abord que tous les nombres α_i soient positifs, et nous poserons

$$a_{ij} = a^0_{ij} + x a^1_{ij} + x^2 a^2_{ij} + \ldots.$$

Nous ferons ensuite la substitution

$$y_i = x^r \varphi_i(x) = x^r(\varphi^0_i + x\varphi^1_i + x^2\varphi^2_i + \ldots)$$

et nous identifierons, sachant qu'il doit exister au moins une solution de cette forme.

Nous aurons d'abord les équations

$$a_{i1}^0 \varphi_1^0 + \ldots + a_{in}^0 \varphi_n^0 = 0,$$

qui devront être compatibles, et nous pourrons supposer au moins l'un des φ, soit φ_1^0, différent de zéro. Alors, si cela est nécessaire, nous remplacerons, dans les équations différentielles (123), l'inconnue y_i par $y_i + \lambda_i y_1$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, de sorte que la valeur initiale $\varphi_i^0 + \lambda_i \varphi_1^0$ ne soit nulle pour aucune valeur de i, et nous aurons

$$x^{1+\alpha_1} \frac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12}(y_2 + \lambda_2 y_1) + \ldots + a_{1n}(y_n + \lambda_n y_1),$$

$$x^{1+\alpha_i} \left(\frac{dy_i}{dx} + \lambda_i \frac{dy_1}{dx} \right) = a_{i1} y_1 + a_{i2}(y_2 + \lambda_2 y_1) + \ldots + a_{in}(y_n + \lambda_n y_1).$$

Il est évident que le nouveau système différentiel pourra prendre la même forme générale que le système (123), et sera régulier comme lui. Mais, de plus, si l'on fait maintenant la substitution

$$y_i = x^r \varphi_i(x),$$

on devra avoir $\varphi_i^0 \neq 0$ pour toutes les valeurs de i.

92. Nous supposerons que le système (123) est préparé de manière à satisfaire à cette hypothèse.

Parmi les équations (123) distinguons celles qui correspondent à la plus grande valeur α des nombres entiers α_i, et plaçons-les les premières. Le système (123) pourra s'écrire

$$x^{1+\alpha} \frac{dy_i}{dx} = \sum_j b_{ij} y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{124}$$

et, pour les valeurs 1, 2, ..., h de l'indice i toutes les quantités b_{ij}^0 ne seront pas nulles pour toutes les valeurs de j, tandis que l'on aura $b_{ij}^0 = 0$ pour $i = h + 1$, $h + 2$, ..., n.

Dans ces conditions, on peut démontrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} b_{11}^0 & \ldots & b_{1h}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{h1}^0 & \ldots & b_{hh}^0 \end{vmatrix} \tag{125}$$

est nul. En effet, dans le système (124), considérons la solution

$$u_i = x^\rho \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f_i(u) = x^\rho \varphi_i(x) = x^\rho(\varphi_i^0 + x\varphi_i^1 + x^2 \varphi_i^2 + \ldots)$$

où nous pouvons supposer $\varphi_i^0 \neq 0$, et posons

$$y_i = u_i q_i.$$

Nous aurons

$$x^{1+\alpha} u_i \frac{dq_i}{dx} = b_{i1} u_1 q_1 + \ldots + \left(b_{ii} u_i - x^{1+\alpha} \frac{du_i}{dx} \right) q_i + \ldots + b_{in} u_n q_n.$$

Mais

$$\frac{1}{u_i} \frac{du_i}{dx} = \frac{\rho}{x} + \frac{1}{\varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dx}.$$

Nous aurons donc

$$x^{1+\alpha} \frac{dq_i}{dx} = b_{i1} \frac{\varphi_1}{\varphi_i} q_1 + \ldots + \left[b_{ii} - \left(\frac{\rho}{x} + \frac{1}{\varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dx} \right) x^{1+\alpha} \right] q_i + \ldots + b_{in} \frac{\varphi_n}{\varphi_i} q_n.$$

Comme ces équations admettent la solution $q_i = 1$, nous aurons identiquement

$$(126) \qquad b_{i1} \frac{\varphi_1}{\varphi_i} + \ldots + b_{in} \frac{\varphi_n}{\varphi_i} = 0.$$

Cela posé, remplaçons q_i par $x^r(q_i^0 + x q_i^1 + \ldots)$. Nous aurons

$$(127) \qquad \begin{aligned} & x^{1+\alpha} \left[\frac{r}{x} (q_i^0 + x q_i^1 + \ldots) + q_i^1 + 2x q_i^2 + \ldots \right] \\ & \quad = (b_{i1}^0 + x b_{i1}^1 + \ldots) \frac{\varphi_1^0 + \ldots}{\varphi_i^0 + \ldots} (q_1^0 + x q_1^1 + \ldots) + \ldots . \end{aligned}$$

En identifiant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, nous aurons d'abord la condition de possibilité

$$(128) \qquad \begin{vmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 \frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} & \ldots & b_{1n}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ b_{21}^0 \frac{\varphi_1^0}{\varphi_2^0} & b_{22}^0 & \ldots & b_{2n}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_2^0} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ b_{n1}^0 \frac{\varphi_1^0}{\varphi_n^0} & b_{n2}^0 \frac{\varphi_2^0}{\varphi_n^0} & \ldots & b_{nn}^0 \end{vmatrix} = 0.$$

Au moyen du premier membre de cette condition formons l'équation en s

$$(129) \qquad \begin{vmatrix} b_{11}^0 - s & \ldots & b_{1n}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ b_{n1}^0 \frac{\varphi_1^0}{\varphi_n^0} & \ldots & b_{nn}^0 - s \end{vmatrix} = 0.$$

Elle pourra se ramener à l'équation

$$(130)\qquad \begin{vmatrix} b_{11}^0 - s & b_{12}^0 & \cdots & b_{1n}^0 \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 - s & \cdots & b_{2n}^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}^0 & b_{n2}^0 & \cdots & b_{nn}^0 - s \end{vmatrix} = 0.$$

Mais, à cause des conditions (126), on peut écrire

$$x^{1+\alpha}\frac{dq_i}{dx} = b_{i2}\frac{\varphi_2}{\varphi_i}(q_2 - q_1) + \ldots + b_{in}\frac{\varphi_n}{\varphi_i}(q_n - q_1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que, si l'on pose

$$z_h = q_h - q_1 \qquad (h = 2, 3, \ldots, n),$$

on pourra former un nouveau système différentiel régulier de la forme

$$x^{1+\alpha}\frac{dz_h}{dx} = \left(b_{h2}\frac{\varphi_2}{\varphi_h} - b_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) z_2 + \ldots,$$

et, en posant

$$z_h = z_h^0 + x z_h^1 + \ldots,$$

on pourra encore identifier à zéro les coefficients des diverses puissances de x, et l'on aura la condition

$$\begin{vmatrix} b_{h2}^0 \frac{\varphi_2^0}{\varphi_h^0} - b_{12}^0 \frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = 0,$$

qui fournira l'équation en s

$$(131)\qquad \begin{vmatrix} b_{22}^0 \frac{\varphi_2^0}{\varphi_2^0} - b_{12}^0 \frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} - s & \cdots & b_{2n}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_2^0} - b_{1n}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ b_{n2}^0 \frac{\varphi_2^0}{\varphi_n^0} - b_{12}^0 \frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} & \cdots & b_{nn}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_n^0} - b_{1n}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Introduisons la racine zéro supplémentaire, et écrivons cette équation sous la forme

$$(132)\qquad \begin{vmatrix} -s & b_{12}^0 \frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} & \cdots & b_{1n}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ 0 & b_{22}^0 - b_{12}^0 \frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} - s & \cdots & b_{2n}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_2^0} - b_{1n}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & \cdots\cdots & \cdots & b_{nn}^0 - b_{1n}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} - s \end{vmatrix} = 0.$$

En ajoutant la première ligne à chacune des suivantes, nous aurons

$$(133)\qquad \begin{vmatrix} -s & b_{12}^0\dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} & \cdots & b_{1n}^0\dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ -s & b_{n2}^0\dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_n^0} & \cdots & b_{nn}^0 - s \end{vmatrix} = 0.$$

Mais à cause des conditions (126) on a, par exemple,

$$-\left[b_{i2}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_i^0} + \ldots + (b_{ii}^0 - s) + \ldots + b_{in}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_i^0}\right] = b_{i1}^0\frac{\varphi_1^0}{\varphi_i^0} + s.$$

Donc, si l'on retranche, dans le déterminant (133), la somme des éléments des dernières colonnes des éléments correspondants de la première, on aura l'équation (129) et, par suite, l'équation (130). Appelons $\Delta(s)$ et $\Delta_1(s)$ les premiers membres des équations (130) et (133), nous aurons, au signe près, la relation

$$(134)\qquad \Delta(s) = s\Delta_1(s).$$

Voici les conséquences de la relation (134).

Considérons d'abord une équation régulière à une inconnue

$$x^{1+\alpha}\frac{dy}{dx} = ay \qquad (\alpha > 0);$$

nous aurons

$$\Delta(s) = -s.$$

Donc $\Delta(s) = 0$ admet la racine zéro.

Passons à un système régulier de deux équations différentielles. Nous aurons, à cause du cas précédent,

$$\Delta_1(s) = 0$$

et, à cause de la relation (134), l'équation

$$\Delta(s) = 0$$

devra admettre deux fois la racine zéro.

De proche en proche, on démontrera que l'équation $\Delta(s) = 0$ a n racines nulles, si le système (124) est régulier. Mais on a ici, en tenant compte des b_{ij}^0 qui sont nuls,

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} b_{11}^0 - s & \cdots & b_{1h}^0 & b_{1,h+1}^0 & \cdots & b_{1n}^0 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ b_{h1}^0 & \cdots & b_{hh}^0 - s & b_{h,h+1}^0 & \cdots & b_{hn}^0 \\ 0 & \cdots & 0 & -s & \cdots & 0 \\ . & \cdots & . & \cdots & \cdots & . \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -s \end{vmatrix} = 0.$$

On en conclut que le déterminant

$$\begin{vmatrix} b^0_{11} & \dots & b^0_{1h} \\ \dots & \dots & \dots \\ b^0_{h1} & \dots & b^0_{hh} \end{vmatrix}$$

est nul.

93. Cette condition subsiste après qu'on a fait une substitution de la forme

$$y_1 = z + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n$$

dans les équations (124).

En effet, on a

$$x^{1+\alpha}\frac{dz}{dx} = (b_{11} - m_2 b_{21} - \dots - m_n b_{n1})z + \sum_i [b_{1i} - \dots - m_n b_{ni} + m_i(b_{11} - \dots - m_n b_{n1})]\, y_i.$$

$$x^{1+\alpha}\frac{dy_i}{dx} = b_{i1} z + (b_{i2} + m_2 b_{i1}) y_2 + \dots + (b_{in} + m_n b_{i1}) y_n.$$

Le déterminant qu'il faut étudier se réduit, à cause des conditions

$$b^0_{ij} = 0 \qquad (i = h+1, \dots, n),$$

à

$$\begin{vmatrix} b^0_{11} - \dots - m_h b^0_{h1} & b^0_{12} - \dots - m_h b^0_{h2} + m_2(b^0_{11} - \dots - m_h b^0_{h1}) & \dots \\ b^0_{21} & b^0_{22} + m_2 b^0_{21} & \dots \\ \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant se ramène immédiatement au déterminant

$$\begin{vmatrix} b^0_{11} & \dots & b^0_{1h} \\ \dots & \dots & \dots \\ b^0_{h1} & \dots & b^0_{hh} \end{vmatrix}$$

et, par conséquent, ces deux déterminants sont nuls ensemble.

On verrait de même qu'une substitution quelconque

$$y_i = z_i + m_1 y_1 + \dots + m_{i-1} y_{i-1} + m_{i+1} y_{i+1} + \dots + m_n y_n,$$

pour une valeur donnée de i, même pour $i = h+1, \dots, n$, ne change rien à la conclusion précédente.

En conséquence, il n'est pas nécessaire que l'on ait $\varphi^0_i \neq 0$ pour que le déterminant $| b^0_{11} \dots b^0_{hh} |$ soit nul; car, pour arriver au cas où φ^0_i n'est nul pour aucune valeur de i, on n'a fait que des substitutions de la forme de celles que l'on vient d'étudier.

94. Revenons maintenant au système différentiel (123) mis sous la forme

$$x^{1+\alpha}\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n, \tag{135}$$

et supposé régulier. Admettons d'abord que, pour aucune valeur de i, on n'ait tous les a_{ij}^0 nuls quel que soit j, et posons

$$y_i = x^r\varphi_i = x^r(\varphi_i^0 + x\varphi_i^1 + x^2\varphi_i^2 + \ldots). \tag{136}$$

Nous aurons les équations

$$a_{i1}^0\varphi_1^0 + \ldots + a_{in}^0\varphi_n^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{137}$$

et, puisque le système (123) admet au moins une solution de la forme (136), le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}^0 & \ldots & a_{1n}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^0 & \ldots & a_{nn}^0 \end{vmatrix} \tag{138}$$

doit être nul.

Posons alors

$$z = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n, \tag{139}$$

et déterminons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ par les conditions

$$a_{1j}^0\lambda_1 + \ldots + a_{nj}^0\lambda_n = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n); \tag{140}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} x^{1+\alpha}\frac{dz}{dx} &= x^{1+\alpha}\left(\lambda_1\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \lambda_n\frac{dy_n}{dx}\right) \\ &= \lambda_1(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n) + \ldots + \lambda_n(a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n) \\ &= (\lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_n a_{n1})y_1 + \ldots + (\lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_n a_{nn})y_n. \end{aligned}$$

A cause des conditions (140), cette équation pourra s'écrire

$$x^\alpha\frac{dz}{dx} = a'_1 y_1 + \ldots + a'_n y_n,$$

où $a'_1, \ldots, a'_n$ seront des fonctions holomorphes comme les fonctions a_{ij}.

Les équations (140) étant compatibles donnent au moins une valeur, λ_n par exemple, qui n'est pas nulle, et, de l'équation (139), on tire

$$y_n = \frac{1}{\lambda_n}z - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}y_1 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}y_{n-1},$$

de sorte qu'on peut éliminer y_n et remplacer le système (135) par le système

$$\begin{aligned}
x^{1+\alpha}\frac{dy_1}{dx} &= b_{11}y_1 + \ldots + b_{1,n-1}y_{n-1} + b_{1n}z,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x^{1+\alpha}\frac{dy_{n-1}}{dx} &= b_{n-1,1}y_1 + \ldots + b_{n-1,n-1}y_{n-1} + b_{n-1,n}z,\\
x^{\alpha}\frac{dz}{dx} &= b_{n1}y_1 + \ldots + b_{n-1,n}y_{n-1} + b_{nn}z,
\end{aligned}$$

et, dans ce système, le déterminant

(141) $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b^0_{11} & \ldots & b^0_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b^0_{n-1,1} & \ldots & b^0_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

devra être nul en vertu du théorème du n° 92.

Posons maintenant

$$y_i = z_i + \mu_i z \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
x^{1+\alpha}\frac{dz_i}{dx} &= x^{1+\alpha}\frac{dy_i}{dx} - \mu_i x^{1+\alpha}\frac{dz}{dx}\\
&= (b_{i1}y_1 + \ldots + b_{in}z) - \mu_i x(b_{n1}y_1 + \ldots + b_{nn}z)\\
&= b_{i1}(z_1 + \mu_1 z) + \ldots + b_{i,n-1}(z_{n-1} + \mu_{n-1}z) + b_{in}z\\
&\quad - \mu_i x[b_{n1}(z_1 + \mu_1 z) + \ldots + b_{n,n-1}(z_{n-1} + \mu_{n-1}z) + b_{nn}z].
\end{aligned}$$

Le coefficient de z sera

$$\mu_1 b_{i1} + \ldots + \mu_{n-1}b_{i,n-1} + b_{in} - \mu_i x(\mu_1 b_{n1} + \ldots + \mu_{n-1}b_{n,n-1} + b_{nn}),$$

et, si l'on veut qu'il soit nul pour $x = 0$, il faudra poser

(142) $$\mu_1 b^0_{i1} + \ldots + \mu_{n-1}b^0_{i,n-1} + b^0_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Mais le déterminant de ces équations étant nul, elles pourront n'être pas compatibles.

Supposons ces équations non compatibles, et remarquons que l'on doit avoir

$$\begin{aligned}
b^0_{11}\varphi^0_1 + \ldots + b^0_{1n}\varphi^0_n &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots,\\
b^0_{n-1,1}\varphi^0_1 + \ldots + b^0_{n-1,n}\varphi^0_n &= 0.
\end{aligned}$$

Il faudra en conclure que l'on a $\varphi^0_n = 0$, et, dans cette hypothèse, on pourra

poser

$$z = xz'.$$

Les équations (142) se réduiront aux équations

$$\mu_1 b_{i1}^0 + \ldots + \mu_{n-1} b_{i,n-1}^0 = 0.$$

Mais l'équation en z deviendra

$$x^{1+\alpha} \frac{dz}{dx} = b_{n1} z_1 + \ldots + b_{n,n-1} z_{n-1} + b'_{nn} z,$$

et l'on devra avoir aussi

$$\mu_1 b_{n1}^0 + \ldots + \mu_{n-1} b_{n,n-1}^0 = 0,$$

et il y aura compatibilité, car on doit pouvoir poser

$$b_{i1}^0 \varphi_1^0 + \ldots + b_{i,n-1}^0 \varphi_{n-1}^0 + b_{in}^0 \varphi_n^0 = 0,$$

et de plus, on a identiquement

$$b_{in}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Alors, si c'est nécessaire, on devra pouvoir calculer des nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}$ tels que l'on ait

$$\begin{aligned} \nu_1 b_{11}^0 + \ldots + \nu_{n-1} b_{n-1,1}^0 + b_{n1}^0 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ \nu_1 b_{1,n-1}^0 + \ldots + \nu_{n-1} b_{n-1,n-1}^0 + b_{n,n-1}^0 &= 0, \end{aligned}$$

et alors l'expression

$$x^{1+\alpha}(\nu_1 z_1 + \ldots + \nu_{n-1} z_{n-1} + z')$$

sera égale à

$$(\nu_1 b_{11} + \ldots + \nu_{n-1} b_{n-1,1} + b_{n1}) z_1 + \ldots + (\nu_1 b_{1n} + \ldots + b_{nn}) z'$$

et sera divisible par x. Nous prendrons alors

$$\nu_1 z_1 + \ldots + \nu_{n-1} z_{n-1} + z'$$

pour inconnue à la place de z'. Soit, par exemple,

$$u = \nu_1 z_1 + \ldots + \nu_{n-1} z_{n-1} + z'.$$

Les équations différentielles prendront la forme générale

$$\left.\begin{aligned} x^{1+\alpha} \frac{dy_i}{dx} &= a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} u, \\ x^{\alpha} \frac{du}{dx} &= a_{n1} y_1 + \ldots + a_{nn} u, \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

et l'on aura maintenant

$$a_{in}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

De plus, le déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11}^0 & \cdots & a_{1,n-1}^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n-1,1}^0 & \cdots & a_{n-1,n-1}^0 \end{vmatrix}$$

sera nul.

Partons maintenant des dernières équations différentielles obtenues, et employons de nouveau, avec des significations analogues, mais non identiques, les notations qui nous ont déjà servi.

Posons

$$(143) \qquad z = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_{n-1} y_{n-1},$$

et déterminons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ par les conditions

$$(144) \qquad a_{1j}^0 \lambda_1 + \ldots + a_{n-1,j}^0 \lambda_{n-1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1);$$

nous aurons, comme précédemment,

$$x^\alpha \frac{dz}{dx} = a'_1 y_1 + \ldots + a'_{n-1} y_{n-1} + a'_n u.$$

Les équations (144) étant compatibles donnent au moins une valeur, λ_{n-1} par exemple, qui n'est pas nulle, et l'on peut poser

$$y_{n-1} = \frac{1}{\lambda_{n-1}} z - \frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}} y_1 - \ldots - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} y_{n-1},$$

de sorte qu'on peut éliminer y_{n-1} et former le nouveau système différentiel

$$(145) \qquad \begin{cases} x^{1+\alpha} \dfrac{dy_1}{dx} = b_{11} y_1 + \ldots + b_{1,n-2} y_{n-2} + b_{1,n-1} z + b_{1n} u, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^{1+\alpha} \dfrac{dy_{n-2}}{dx} = b_{n-2,1} y_1 + \ldots + b_{n-2,n-2} y_{n-2} + b_{n-2,n-1} z + b_{n-2,n} u, \\ x^\alpha \dfrac{dz}{dx} = b_{n-1,1} y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_{n-1,n-1} z + b_{n-1,n} u, \\ x^\alpha \dfrac{du}{dx} = b_{n1} y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_{n,n-1} z + b_{nn} u, \end{cases}$$

et, dans ce système, le déterminant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11}^0 & \cdots & b_{1,n-2}^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ b_{n-2,1}^0 & \cdots & b_{n-2,n-2}^0 \end{vmatrix}$$

devra être nul.

Posons maintenant

$$y_i = z_i + \mu_i z \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2);$$

nous aurons

$$x^{1+\alpha}\frac{dz_i}{dx} = \mathrm{A}_{i1} z_1 + \ldots + \mathrm{A}_{i,n-2} z_{n-2} + \mathrm{A}_{i,n-1} z + \mathrm{A}_{in} u.$$

Le coefficient de z sera, pour $x = 0$,

$$\mu_1 b_{i1}^0 + \ldots + \mu_{n-2} b_{i,n-2}^0 + b_{i,n-1}^0,$$

et, si l'on veut qu'il soit nul, il faudra poser

$$(146) \qquad \mu_1 b_{i1}^0 + \ldots\, b_{i,n-1}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Ces équations peuvent ne pas être compatibles. Mais, comme on doit avoir

$$b_{i1}^0 \varphi_1^0 + \ldots + b_{i,n-1}^0 \varphi_{n-1}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2),$$

on devra poser $\varphi_{n-1}^0 = 0$, ce qui conduira à remplacer z par xz'. Les équations (146) se réduiront aux équations compatibles

$$\mu_1 b_{i1}^0 + \ldots + \mu_{n-2} b_{i,n-2}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Alors, si c'est nécessaire, on devra pouvoir calculer des nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-2}$ tels que l'on ait

$$\nu_1 b_{1j}^0 + \ldots + \nu_{n-2} b_{n-2,j}^0 + b_{n-1,j}^0 = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-2),$$

et alors l'expression

$$x^{1+\alpha}(\nu_1 z_1 + \ldots + \nu_{n-2} z_{n-2} + z')$$

sera égale à

$$(\nu_1 b_{11} + \ldots + b_{n1}) z_1 + \ldots + (\nu_1 b_{1,n-1} + \ldots + b_{n,n-1}) z'$$

et sera divisible par x. On prendra alors

$$\nu_1 z_1 + \ldots + \nu_{n-2} z_{n-2} + z'$$

pour inconnue à la place de z', et finalement les équations différentielles prendront la forme

$$x^{1+\alpha}\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}\; y_1 + \ldots + a_{i,n-1}\; u_1 + a_{in}\; u_2,$$

$$x^{\alpha}\; \frac{du_1}{dx} = a_{n-1,1} y_1 + \ldots + a_{n-1,n-1} u_1 + a_{n-1,n} u_2,$$

$$x^{\alpha}\; \frac{du_2}{dx} = a_{n1}\; y_1 + \ldots + a_{n,n-1}\; u_1 + a_{nn}\; u_2,$$

et l'on aura maintenant

$$a_{i,n-1}^0 = 0, \qquad a_{in}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

De plus, le déterminant

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11}^0 & \dots & a_{1,n-2}^0 \\ \dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n-2,1}^0 & \dots & a_{n-2,n-2}^0 \end{vmatrix}$$

sera nul.

Il est évident que le procédé pourra s'appliquer indéfiniment, et, par suite, qu'on pourra ramener le système proposé à la forme

$$x^\alpha \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n.$$

En diminuant α d'autant d'unités qu'il sera nécessaire, ce qu'on sait maintenant réaliser pratiquement, on sera finalement ramené à un système canonique.

95. Étudions l'exemple numérique suivant

$$\frac{dy_1}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \ldots\right) y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-1 + x + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \ldots\right) y_2.$$

On trouve d'abord qu'il faut remplacer y_2 par xy_2, ce qui donne

$$\frac{dy_1}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \ldots\right) y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{1}{x} + 1 + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \ldots\right) y_2.$$

La même substitution sera encore nécessaire, et l'on aura

$$\frac{dy_1}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ldots\right) y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots\right) y_2.$$

On posera maintenant

$$z = y_1 - y_2, \qquad \text{d'où} \qquad y_1 = z + y_2,$$

et l'on aura

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{3}{x} - \frac{1}{x} + \ldots\right)(z + y_2) + \left(\frac{4}{x} + \ldots\right) y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ldots\right)(z + y_2) + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots\right) y_2$$

ou encore

$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{2}{x} + \ldots\right) y_2 + \left(-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + \ldots\right) z,$$
$$\frac{dz}{dx} = \left(\ldots\ldots\ldots\ldots\right) y_2 + \left(-\frac{4}{x} + \ldots\right) z.$$

Enfin, remplaçons z par zx, nous aurons

$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{2}{x} + \ldots\right) y_2 + \left(-\frac{1}{x} + 1 + \ldots\right) z,$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\left(\ldots\ldots\ldots\right) y_2 - \left(\frac{5}{x} + \ldots\right) z.$$

C'est un système canonique, ce qui prouve que le système proposé primitivement est régulier.

Du reste, on peut le vérifier autrement, en remarquant que le système qu'on vient d'étudier dérive du système numérique du n° 88 par le moyen des substitutions

$$y_1 = x^3 z_1, \qquad y_2 = x z_2.$$

96. Le cas le plus important des systèmes réguliers est celui qui provient de l'équation d'ordre n

$$(147) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{p_1}{x^{\varpi_1}} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{p_n}{x^{\varpi_n}} y,$$

supposée régulière. On peut le traiter facilement d'une manière directe.

En effet, remplaçons l'équation (147) par le système équivalent

$$(148) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{p_2}{x^{\varpi_1}} y_1 + \dfrac{p_2}{x^{\varpi_2}} y_2 + \ldots + \dfrac{p_n}{x^{\varpi_n}} y_n, \\ \dfrac{dy_j}{dx} = y_{j-1} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n), \end{cases}$$

les p étant des fonctions holomorphes non nulles pour $x = 0$.

Faisons le changement de variables suivant

$$\begin{gathered} y_n = x^\rho \varphi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{n-i} = x^{\rho-i} \varphi_{n-i}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_1 = x^{\rho-(n-1)} \varphi_1, \end{gathered}$$

de manière que les dernières équations (148) prennent la forme canonique. Par exemple, l'équation

$$y_{n-i-1} = \frac{dy_{n-i}}{dx}$$

donnera

$$\varphi_{n-i-1} = (\rho - i)\,\varphi_{n-i} + x\,\frac{d\varphi_{n-i}}{dx}.$$

On remarquera en passant que

$$\varphi_{n-i-1}^0 = (\rho - i)\,\varphi_{n-i}^0,$$

et, par suite, que

$$\varphi_{n-i-1}^0 = (\rho - i)(\rho - i + 1)\ldots(\rho - 1)\rho\,\varphi_n^0,$$

et tous les φ_i^0 seront différents de zéro, si ρ est quelconque.

La première équation (148) deviendra

$$x^{\rho-(n-1)}\frac{d\varphi_1}{dx} + (\rho - n + 1)x^{\rho-n}\varphi_1 = \frac{p_1}{x^{\varpi_1-\rho+n-1}}\varphi_1 + \ldots + \frac{p_n}{x^{\varpi_n-\rho}}\varphi_n,$$

ou encore

$$x\frac{d\varphi_1}{dx} + (\rho - n + 1)\,\varphi_1 = \frac{p_1}{x^{\varpi_1-1}}\varphi_1 + \ldots + \frac{p_n}{x^{\varpi_n-n}}\varphi_n.$$

Les équations précédentes forment donc un système qu'on peut écrire

$$x^h\frac{d\varphi_1}{dx} = \mathrm{P}_1\varphi_1 + \mathrm{P}_2\varphi_2 + \ldots + \mathrm{P}_n\varphi_n,$$

$$x\frac{d\varphi_{n-i}}{dx} = \varphi_{n-i-1} - (\rho - i)\,\varphi_{n-i},$$

et où toutes les quantités P ne seront pas nulles à la fois pour $x = 0$.

Le système sera régulier si l'on a

$$\varpi_1 \leqq 1, \qquad \varpi_2 \leqq 2, \qquad \ldots, \qquad \varpi_n \leqq n,$$

car alors on aura $h \leqq 1$.

Je dis que ces conditions suffisantes sont nécessaires. Pour le démontrer, admettons la proposition pour une équation de la forme (147) et d'ordre $(n-1)$ et démontrons qu'elle est vraie pour une équation d'ordre n. Comme elle est vraie pour $n = 1$, elle sera ainsi démontrée en général.

Au n° 24 du Chapitre I nous avons montré que, pour ramener un système de la forme (148) à un système non seulement linéaire, mais encore de la même forme, on devait poser

$$y_n = y = u\int t\,dx;$$

u étant une intégrale donnée de l'équation différentielle (147). Dans les conditions actuelles, nous supposerons u_n régulier et de la forme $x^r\varphi_n(x)$ et, en nous reportant aux notations de ce n° 24, nous ramènerons le système (148) au système

également régulier

$$\frac{dt_1}{dx} = P_1 t_1 + \ldots + P_{n-1} t_{n-1},$$

$$\frac{dt_k}{dx} = t_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

où l'on a

$$P_1 \quad = \frac{1}{u}\left[-\frac{n}{1}\frac{du}{dx} + \frac{p_1 u}{x^{\varpi_1}}\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P_{n-1} = \frac{1}{u}\left[-\frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \frac{p_1}{x^{\varpi_1}}\frac{n(n-1)\ldots 3.2}{1.2\ldots(n-2)}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{p_{n-1}u}{x^{\varpi_{n-1}}}\right].$$

Nous supposons que $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ peuvent se mettre sous les formes $\frac{\Pi_1}{x}, \frac{\Pi_2}{x^2}, \ldots, \frac{\Pi_{n-1}}{x^{n-1}}$, où $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-1}$ sont des fonctions holomorphes.

On remarquera alors que l'on a

$$u = x^r \varphi(x),$$

$$\frac{du}{dx} = x^r \frac{d\varphi}{dx} + r x^{r-1}\varphi,$$

et, d'une manière générale,

$$\frac{d^k u}{dx^k} = x^r \frac{d^k\varphi}{dx^k} + \alpha_1 x^{r-1}\frac{d^{k-1}\varphi}{dx^{k-1}} + \ldots + \alpha_k x^{r-k}\varphi,$$

ce que l'on peut écrire

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} \alpha_\lambda x^{r-\lambda}\frac{d^{k-\lambda}\varphi}{dx^{k-\lambda}}, \qquad \left(\frac{d^0\varphi}{dx^0} = \varphi\right),$$

et, par suite,

$$\frac{1}{u}\frac{d^k u}{dx^k} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} \alpha_\lambda x^{-\lambda}\frac{1}{\varphi}\frac{d^{k-\lambda}\varphi}{dx^{k-\lambda}}.$$

Chacun de ces produits est donc infini d'ordre infini d'ordre k au plus.

En conséquence, si des expressions de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ on tire $\frac{p_1}{x^{\varpi_1}}, \frac{p_2}{x^{\varpi_2}}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{x^{\varpi_{n-1}}}$, on obtiendra des expressions infinies d'ordres finis $1, 2, \ldots, n-1$ respectivement comme $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ eux-mêmes. On devra donc avoir $\varpi_1 = 1$, $\varpi_2 = 2, \ldots, \varpi_{n-1} = n-1$.

Enfin, de la première équation (148) on tirera

$$\frac{p_n}{x^{\varpi_n}} = -\frac{1}{u}\left(\frac{d^n u}{dx^n} + \frac{p_1}{x}\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{p_{n-1}}{x^{n-1}}\frac{du}{dx}\right),$$

et, en développant le calcul, on verra que l'on a aussi $\varpi_n = n$ (1).

On retrouve ainsi le beau théorème de M. Fuchs :

Les équations différentielles linéaires et homogènes, d'ordre n et à coefficients uniformes, dont les intégrales n'ont qu'un nombre fini de points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\rho, \infty$, *et restent régulières dans les domaines de ces points, sont de la forme*

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{P_{\rho-1}(x)}{\Psi(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{P_{2(\rho-1)}(x)}{[\Psi(x)]^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{P_{n(\rho-1)}(x)}{[\Psi(x)]^n}y,$$

où

$$\Psi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\rho),$$

et où les $P(x)$ *désignent des polynomes en* x *de degrés marqués par les indices ou de degrés moindres.*

Cette belle conclusion de l'étude des systèmes réguliers montre que le seul cas général possédant un caractère de simplicité est celui du système (148) qui provient de l'équation (147) différentielle d'ordre n.

97. Écrivons une équation régulière d'ordre n sous la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{p_1}{x}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{p_n}{x^n}y = 0.$$

Les exposants r des solutions seront déterminés par l'équation

$$D(r) = (r-n+1)(r-n+2)\ldots r + p_1^0(r-n+2)\ldots r + \ldots + p_n^0 = 0,$$

qui est algébrique et de degré n en r.

Cette équation s'appelle, soit l'*équation fondamentale déterminante*, soit l'*équation caractéristique* de l'équation différentielle.

Il est utile de connaître les principales propriétés de cette équation algébrique.

D'abord, pour former l'équation $D(r) = 0$, on pourra procéder de la manière suivante. On posera $y = x^r$ dans le premier membre de l'équation différentielle, ce qui donnera l'expression

$$x^{r-n}[r(r-1)\ldots(r-n+1) + p_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + p_n].$$

(1) *Voir* la Thèse de M. Floquet.

On divisera ce résultat par x^r, et l'on égalera à zéro le coefficient de la plus basse puissance de x.

Voici d'autres propriétés :

Si p_n est identiquement nul, $D(r)$ est divisible par r. Faisons cette division et changeons ensuite r en $r+1$, nous aurons l'équation caractéristique de l'équation différentielle d'ordre $n-1$, obtenue en prenant pour inconnue $\frac{dy}{dx}$. Il n'y a qu'à vérifier l'exactitude du calcul proposé, ce qu'il est facile de faire.

Si l'on pose $y = x^{r_0}z$ dans l'équation différentielle, l'équation caractéristique de l'équation en z aura pour racines celles de l'équation caractéristique primitive, diminuées de r_0. Elle se déduit donc de l'équation $D(r) = 0$ en changeant r en $r + r_0$.

Si l'on pose $y = \Psi(x)z$, $\Psi(x)$ étant une fonction holomorphe différente de zéro pour $x = 0$, l'équation caractéristique de l'équation en z est la même que celle de l'équation en y. En effet, on voit sans peine que l'équation en z étant de la forme

$$\frac{d^n z}{dx^n} + (p_1 + P_1)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + (p_2 + P_2)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + (p_n + P_n)z = 0,$$

son équation caractéristique a son premier membre décomposable en deux parties, la première provenant de l'expression

$$x^{r-n}[r(r-1)\ldots(r-n+1) + p_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + p_n],$$

et la seconde de l'expression

$$x^{r-n}[r(r-1)\ldots(r-n+1) + P_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + P_n].$$

Or, le plus haut exposant de x dans les dénominateurs de la première expression étant supérieur au plus grand exposant de x dans la seconde, si l'on multiplie par x^{g-r}, g étant le plus grand de tous les exposants, et si l'on fait ensuite $x = 0$, la seconde expression donnera un résultat nul, et l'on obtiendra, par conséquent, le même résultat qu'en opérant sur la première expression seule, c'est-à-dire sur celle qui correspond à l'équation caractéristique de l'équation en y.

Ces diverses propriétés, rapprochées des théories que l'on a vues dans les Chapitres précédents, servent de base à la théorie des équations différentielles linéaires et homogènes d'ordre n dans la plupart des Mémoires [1] publiés sur cette question. Pour plus de détails, nous renverrons le lecteur à ces Travaux.

---

[1] FUCHS, *Journal de Crelle*, t. 66, p. 121 et Tomes suivants. — TANNERY, *Thèse de Doctorat*. — THOMÉ et FRŒBENIUS, *Journal de Crelle*, t. 66 et suivants.

Ajoutons enfin une remarque. Il peut se présenter une circonstance curieuse dans le cas des systèmes réguliers. Si, en un point quelconque $x=0$, toutes les racines de l'équation caractéristique $F(r)=0$ sont entières, positives et distinctes, elles ne formeront qu'un seul groupe. Si, en outre, les logarithmes disparaissent dans l'intégration, les solutions n'offriront au point $x=0$ aucune singularité, et ce point ne sera pas en réalité un point singulier. Il ne diffère des autres points qu'en ce que le déterminant d'un système fondamental de solutions s'y annule. Ces points ont reçu, de M. Weierstrass, le nom de *points à apparence singulière*.

98. Le théorème de M. Fuchs fournit une seconde méthode pour décider si un système quelconque est régulier.

Posons

$$z = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n,$$

et soit donné le système

$$(149) \qquad x^\rho \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n.$$

Il est à peu près évident que ce système sera régulier, si la valeur z satisfait à une équation différentielle régulière d'ordre n, *quelles que soient les valeurs* de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Nous allons préciser cette question.

D'abord z satisfait à une équation différentielle. Car si la variable x fait le tour de l'origine, on a, avec les notations du Chapitre III,

$$Z_j = \lambda_1 Y_{1j} + \ldots + \lambda_n Y_{nj},$$

et, entre les anciennes et les nouvelles valeurs y_{ij} et Y_{ij} des éléments d'un système fondamental de solutions, existent les relations

$$Y_{ij} = C_{j1} y_{i1} + \ldots + C_{jn} y_{in},$$

de sorte qu'on a

$$Z_j = \lambda_1 (C_{j1} y_{11} + \ldots + C_{jn} y_{1n}) + \ldots + \lambda_n (C_{j1} y_{n1} + \ldots + C_{jn} y_{nn})$$

ou

$$Z_j = C_{j1} (\lambda_1 y_{11} + \ldots + \lambda_n y_{n1}) + \ldots + C_{jn} (\lambda_1 y_{1n} + \ldots + \lambda_n y_{nn}),$$

ou enfin

$$Z_j = C_{j1} z_1 + \ldots + C_{jn} z_n.$$

On reconnaît les équations caractéristiques d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n. Pour des valeurs choisies de λ, l'ordre n'est pas nécessairement n; il faut, pour cela, en plus des conditions précédentes, que les n fonctions $z_1, \ldots, z_n$ soient linéairement indépendantes.

Le contraire peut arriver. En effet, écrivons la relation

$$A_1 z_1 + \ldots + A_n z_n = 0$$

à coefficients constants. On en conclura, en faisant

$$z_j = \lambda_1 y_{1j} + \ldots + \lambda_n y_{nj},$$

la relation

$$A_1(\lambda_1 y_{11} + \ldots + \lambda_n y_{n1}) + \ldots + A_n(\lambda_1 y_{1n} + \ldots + \lambda_n y_{nn}) = 0$$

ou

$$\lambda_1(A_1 y_{11} + \ldots + A_n y_{1n}) + \ldots + \lambda_n(A_1 y_{n1} + \ldots + A_n y_{nn}) = 0.$$

Or, les parenthèses renferment les éléments d'une certaine solution du système différentiel. *Donc, si l'équation générale en z n'est pas d'ordre n, il existe une solution $\eta_1, \ldots, \eta_n$ des équations en y, entre les éléments de laquelle il existe une relation linéaire à coefficients constants de la forme*

$$\lambda_1 \eta_1 + \ldots + \lambda_n \eta_n = 0.$$

La réciproque est vraie. En effet, on a

$$\eta_i = A_1 y_{i1} + \ldots + A_n y_{in}$$

et, par suite,

$$\lambda_1(A_{11} y_{11} + \ldots) + \ldots + \lambda_n(A_1 y_{n1} + \ldots) = 0$$

ou

$$A_1(\lambda_1 y_{11} + \ldots + \lambda_n y_{n1}) + \ldots + A_n(\lambda_1 y_{1n} + \ldots) = 0.$$

Donc les n fonctions

$$z_i = \lambda_1 y_{1i} + \ldots + \lambda_n y_{ni}$$

ne sont pas linéairement indépendantes.

Mais si les λ restent quelconques, l'ordre de l'équation en z est n. Car, pour que l'équation

$$\lambda_1(A_1 y_{11} + \ldots + A_n y_{1n}) + \ldots + \lambda_n(A_1 y_{n1} + \ldots + A_n y_{nn}) = 0$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, il faudrait que l'on eût

$$A_1 y_{in} + \ldots + A_n y_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ce qui est impossible, si le système de solution y_{ij} est fondamental.

On formera l'équation d'*ordre n en z* de la manière suivante.

Posons, en général,

$$\frac{d^k y_i}{dx^k} = \frac{1}{x^{k\rho}}(A_{i1}^k y_1 + \ldots + A_{in}^k y_n),$$

et dérivons cette équation. Nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}y_i}{dx^{k+1}} = & \frac{1}{x^{k\rho}}\left(y_1\frac{dA_{i1}^k}{dx}+\ldots+y_n\frac{dA_{in}^k}{dx}\right)\\ &+\frac{1}{x^{k\rho}}\left(A_{i1}^k\frac{dy_1}{dx}+\ldots+A_{in}^k\frac{dy_n}{dx}\right)\\ &-\frac{k\rho}{x^{k\rho+1}}(A_{i1}^k y_1+\ldots+A_{in}^k y_n),\end{aligned}$$

et, en remplaçant $\frac{dy_i}{dx}$ par sa valeur tirée des équations proposées, nous obtiendrons

$$\frac{d^{k+1}y_i}{dx^{k+1}} = \frac{1}{x^{(k+1)\rho}}(A_{i1}^{k+1}y_1+\ldots+A_{in}^{k+1}y_n),$$

équations où l'on a

$$A_{ij}^{k+1} = x^\rho\frac{dA_{ij}^k}{dx} - k\rho x^{\rho-1}A_{ij}^k + (A_{i1}^k A_{1j}^1+\ldots+A_{in}^k A_{nj}^1),$$

et les fonctions A_{ij} seront holomorphes, à condition que ρ soit un entier positif, et que les fonctions a_{ij} de l'équation (149) qu'on peut écrire A_{ij}^1 soient holomorphes.

On aura alors successivement

$$\frac{d^k z}{dx^k} = \lambda_1\frac{d^k y_1}{dx^k}+\ldots+\lambda_n\frac{d^k y_n}{dx^k},$$

$$x^{k\rho}\frac{d^k z}{dx^k} = \lambda_1(A_{11}^k y_1+\ldots)+\lambda_n(A_{n1}^k y_1+\ldots),$$

$$x^{k\rho}\frac{d^k z}{dx^k} = (\lambda_1 A_{11}^k+\ldots)y_1+\ldots+(\lambda_1 A_{1n}^k+\ldots)y_n,$$

ce que nous écrirons simplement

$$x^{k\rho}\frac{d^k z}{dx^k} = P_{k1}y_1+\ldots+P_{kn}y_n.$$

En faisant $k=1, 2, \ldots, n$ dans cette équation, nous obtiendrons n équations du premier degré en $y_1, \ldots, y_n$. Avec l'équation qui définit z nous aurons $n+1$ équations entre lesquelles nous pourrons éliminer $y_1, \ldots, y_n$. Le résultat obtenu est de la forme

$$\begin{vmatrix} x^{n\rho}\frac{d^n z}{dx^n} & P_{n1} & \ldots & P_{nn}\\ x^{(n-1)\rho}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} & P_{n-1,1} & \ldots & P_{n-1,n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ z & \lambda_1 & \ldots & \lambda_n\end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant, de la forme

$$\frac{d^n z}{dx^n} + \frac{1}{x^\rho}\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{x^{(n-1)\rho}}\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x^{n\rho}}\frac{\Delta}{\Delta_n} z = 0. \tag{150}$$

Si l'on a $\rho = 1$, tous les rapports $\frac{\Delta_i}{\Delta}$ devront être holomorphes, car l'équation en z devra être régulière comme le système proposé.

Pour une valeur quelconque de ρ, les conditions seront, comme on l'a déjà vu directement, compliquées à cause de la présence indispensable des n indéterminées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans les déterminants Δ.

Cependant, si les hypothèses

$$\lambda_j = 0, \qquad j \neq i, \qquad \lambda_i \neq 0,$$

faites pour toutes les valeurs de i successivement, conduisent à n équations différentielles d'*ordre* n, chacune de ces équations, étant débarrassée d'arbitraires, sera d'une façon rapide reconnue régulière ou non, et cet examen suffira évidemment pour formuler une conclusion sur l'équation générale en z, ou sur le système proposé lui-même.

99. Le procédé qui permet de ramener un système régulier à la forme canonique consiste à faire une suite mélangée de substitutions des formes

$$y_i | x^k y_i$$

ou

$$y_i | z_i + \sum_j m_j y_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n).$$

Réciproquement, si l'on fait, dans un système canonique général, une suite de substitutions arbitraires des formes précédentes, on formera un système régulier quelconque.

Comme conclusion de ce Chapitre, nous dirons que tout système régulier peut être ramené à un *système canonique*.

CHAPITRE VI.

DES SYSTÈMES A COEFFICIENTS PÉRIODIQUES.

100. Au moyen des principes exposés au Chapitre précédent, on peut reconnaître si les solutions d'un système d'équations linéaires et homogènes sont régulières en chaque point. Si, de plus, les racines de l'équation caractéristique sont entières, et si les logarithmes disparaissent, les éléments des solutions seront uniformes. Nous supposerons dans le Chapitre VI que ces hypothèses soient réalisées dans tout le plan, et nous étudierons la classe très intéressante des *équations différentielles de la forme*

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,$$

où les coefficients a sont des fonctions uniformes admettant la période ω, *et dont les solutions sont uniformes.*

Si l'on pose $e^{\frac{2\pi x\sqrt{-1}}{\omega}} = x'$, le système A prendra la forme

$$\text{(A')} \qquad \frac{dy_i}{dx'} \times \frac{2\pi x'\sqrt{-1}}{\omega} = a'_{i1}y_1 + \ldots + a'_{in}y_n.$$

Ce système linéaire pourra être étudié comme un système ordinaire, et, en rétablissant ensuite la variable indépendante x, on aura mis en évidence le rôle de la période ω.

Mais on peut employer un procédé direct de recherches, comme nous le montrerons dans ce Chapitre.

101. Soient $y_{ij} (j = 1, 2, \ldots, n)$, ou $f_{ij}(x)$ n solutions distinctes du système différentiel (A). Quand la variable x va, par un chemin quelconque, du point x au point $x + \omega$, les fonctions uniformes $f_{ij}(x)$ prennent les nouvelles valeurs $f_{ij}(x + \omega)$, tandis que les coefficients uniformes et périodiques a reprennent leurs valeurs primitives. En conséquence, les $f_{ij}(x + \omega)$, fonctions toujours distinctes, forment un second système fondamental de solutions dont on peut exprimer les éléments en fonctions linéaires, homogènes, à coefficients constants des éléments du premier système fondamental $f_{ij}(x)$. On aura donc des relations de

la forme

$$f_{ij}(x+\omega) = C_{j1} f_{i1}(x) + \ldots + C_{jn} f_{in}(x), \tag{151}$$

où le déterminant des constantes C est différent de zéro.

102. *Les relations* (151) *sont caractéristiques dans le plan des systèmes d'équations linéaires et homogènes, à coefficients périodiques, et dont l'intégrale générale est uniforme.*

Soit, en effet, D le déterminant, supposé différent de zéro, de n^2 fonctions y_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, \ldots, n)$ d'une variable indépendante x, uniformes dans tout le plan et n'ayant que l'infini pour point singulier.

Supposons que cette variable x décrive un chemin quelconque allant du point x au point $x+\omega$. Si les n^2 fonctions prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants telles que les relations (151), ces fonctions forment un système fondamental de solutions d'un système d'équations de la forme (A) dont les coefficients a sont périodiques et n'ont d'autre point singulier que l'infini.

Nous démontrerons cette proposition en formant un système d'équations tel que (A) auquel satisfassent les n^2 solutions y_{ij}. Nous aurons, en général, les relations

$$\frac{dy_{ij}}{dx} = a_{i1} y_{1j} + \ldots + a_{in} y_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

et nous en tirerons

$$D a_{ip} = \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & \dfrac{dy_{i1}}{dx} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdot & \cdots & \cdots \\ y_{1n} & \cdots & \dfrac{dy_{in}}{dx} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que nous pourrons calculer les coefficients a.

Ces coefficients sont exprimés par le rapport de deux déterminants. Le dénominateur du rapport est toujours D; le numérateur est le résultat obtenu en remplaçant dans D les éléments d'une colonne par les dérivées des fonctions y_{ij}. Les éléments des deux déterminants prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme (151) quand la variable x décrit un chemin quelconque du point x au point $x+\omega$. Les constantes sont les mêmes pour les éléments homologues des deux déterminants qui forment le rapport. Les deux termes du rapport sont donc multipliés par le même déterminant des constantes. Donc le rapport ne change pas, et, par suite, les coefficients a sont des fonctions périodiques.

Les coefficients a, n'ayant évidemment pas d'autres points singuliers que ceux des fonctions y_{ij} elles-mêmes, n'ont d'autre point singulier que l'infini.

Enfin, le déterminant D n'étant pas identiquement nul, les fonctions y_{ij} forment un système fondamental de solutions du système d'équations (A).

103. Considérons maintenant deux systèmes fondamentaux de solutions du système d'équations (A). Nous représenterons leurs valeurs par y_{ij} et η_{ij}, et leurs nouvelles valeurs par Y_{ij} et H_{ij} quand la variable x a passé du point x au point $x+\omega$. Les déterminants L et Λ des constantes qui entrent dans les relations

$$\left.\begin{aligned} Y_{ij} &= l_{j1}y_{i1}+\ldots+l_{jn}y_{in} \\ H_{ij} &= \lambda_{j1}\eta_{i1}+\ldots+\lambda_{jn}\eta_{in} \end{aligned}\right\} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

seront différents de zéro.

Si l'on exprime les éléments η_{ij} en fonction des éléments y_{ij}, on aura les relations à coefficients constants

$$\eta_{ij} = C_{j1}y_{i1}+\ldots+C_{jn}y_{in},$$
$$H_{ij} = C_{j1}Y_{i1}+\ldots+C_{jn}Y_{in},$$

d'où, en développant les deux expressions de H_{ij},

$$H_{ij} = (C_{j1}l_{11}+\ldots+C_{jn}l_{n1})y_{i1}+\ldots+(C_{j1}l_{1n}+\ldots+C_{jn}l_{nn})y_{in},$$
$$H_{ij} = (\lambda_{j1}C_{11}+\ldots+\lambda_{jn}C_{n1})y_{i1}+\ldots+(\lambda_{j1}C_{1n}+\ldots+\lambda_{jn}C_{nn})y_{in},$$

on aura

$$C_{j1}l_{1i}+\ldots+C_{jn}l_{ni} = \lambda_{j1}C_{1i}+\ldots+\lambda_{jn}C_{ni};$$

on en conclut (n° 58) *que les diviseurs élémentaires du déterminant*

$$R(\varepsilon) = \begin{vmatrix} l_{11}-\varepsilon & \ldots & l_{n1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ l_{1n} & \ldots & l_{nn}-\varepsilon \end{vmatrix}$$

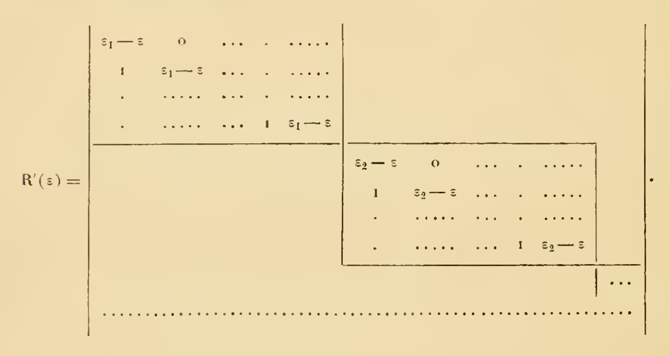
ne dépendent pas du choix du système fondamental de solutions qui sert à former ce déterminant.

104. Posons, en général

$$Y_{ij} = l_{j1}y_{i1}+\ldots+l_{jn}y_{in},$$

les coefficients l étant indépendants de l'indice i. Nous venons de voir que le déterminant R(ε) conserve les mêmes diviseurs élémentaires quand on change le système fondamental de solutions. On a vu, d'autre part (Chap. II, n° 53), qu'on

peut former *a priori* un déterminant ayant les mêmes diviseurs élémentaires que le précédent. Ce déterminant $R'(\varepsilon)$ est



Il résulte de là qu'on peut faire une double substitution de la forme

$$y_{ij} = C_{j1}y'_{i1} + \ldots + C_{jn}y'_{in},$$
$$x'_{ij} = C_{1j}x_{i1} + \ldots + C_{nj}x_{in},$$

qui ramène à la fois la forme

$$x_{i1}Y_{i1} + \ldots + x_{in}Y_{in}$$

à la forme

$$x'_{i1}Y'_{i1} + \ldots + x'_{in}Y'_{in},$$

et la forme

$$x_{i1}y_{i1} + \ldots + x_{in}y_{in}$$

à la forme

$$x'_{i1}y'_{i1} + \ldots + x'_{in}y'_{in}$$

les y' et les Y' étant les anciennes et les nouvelles valeurs d'éléments qui correspondent au déterminant $R'(\varepsilon)$.

Or, si l'on considère la forme de ce déterminant par rapport aux coefficients qu'on appelait l d'une manière générale, on voit qu'on a les relations importantes

$$Y'_{i1} = \varepsilon_1 y'_{i1},$$
$$Y'_{i2} = \varepsilon_1 y'_{i2} + y'_{i1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Y'_{ij} = \varepsilon_1 y'_{ij} + y'_{i,j-1},$$
$$Y'_{i'1} = \varepsilon_2 y'_{i'1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Y'_{ij'} = \varepsilon_2 y'_{i'j'} + y'_{i,j'-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On tire de là le théorème suivant :

Soient $(\varepsilon_1 - \varepsilon)^{e_1}, \ldots, (\varepsilon_\rho - \varepsilon)^{e_\rho}$ *les diviseurs élémentaires du déterminant* $R(\varepsilon)$, *et il importe peu que les binomes* $\varepsilon_1 - \varepsilon, \ldots, \varepsilon_\rho - \varepsilon$ *soient distincts ou non, on peut trouver un système fondamental de solutions dont les éléments se groupent d'après les relations*

$$\begin{aligned} Y_{i1} &= \varepsilon_h y_{i1}, \\ Y_{i2} &= \varepsilon_h y_{i2} + y_{i1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_{ie_h} &= \varepsilon_h y_{ie_h} + y_{i,e_h-1}, \end{aligned}$$

$(\varepsilon_h - \varepsilon)^{e_h}$ *étant l'un quelconque des* ρ *diviseurs élémentaires de* $R(\varepsilon)$.

105. On peut arriver aux relations précédentes en partant d'un système fondamental quelconque de solutions, et en substituant à ses éléments d'autres éléments qui leur soient liés par des relations linéaires et homogènes indépendantes et à coefficients constants convenablement choisis.

Le choix de ces coefficients est déterminé par des procédés identiques à ceux qu'on a exposés au Chapitre III (n°s 68 et suivants) dans une question absolument analogue.

106. Posons

$$f(x) = \varpi_1(x) + x\,\varpi_2(x) + \ldots + x^{m-1}\,\varpi_m(x),$$

les fonctions ϖ satisfaisant aux relations

$$\Pi = \varepsilon\varpi,$$

lorsque dans ces fonctions x varie de x à $x + \omega$. On dit dans ces conditions que chaque fonction uniforme $\varpi(x)$ est *périodique de seconde espèce à la période* ω *et au multiplicateur* ε. Si $\varepsilon = 1$, on dit simplement que $\varpi(x)$ est *périodique*. On peut dire aussi que $\varpi(x)$ est périodique de première espèce.

Toute fonction uniforme satisfaisant à la relation

$$\Pi = \varepsilon\varpi, \qquad \text{ou} \qquad \varpi(x+\omega) = \varepsilon\,\varpi(x),$$

peut être représentée par l'expression

$$\varpi(x) = e^{rx}\,p(x),$$

où l'on a $\varepsilon = e^{r\omega}$, et où $p(x)$ est une fonction périodique de première espèce. En effet, le produit $e^{-rx}\,\varpi(x)$ est périodique de première espèce.

107. Pour chaque groupe de solutions satisfaisant aux relations

$$
\begin{aligned}
Y_{i1} &= \varepsilon y_{i1}, \\
Y_{i2} &= \varepsilon y_{i2} + y_{i1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
Y_{im} &= \varepsilon y_{im} + y_{i,m-1},
\end{aligned}
$$

on pourra poser

$$
(152)\quad \left\{
\begin{aligned}
y_{im} &= f_i(x), \\
y_{i,m-1} &= \varepsilon \Delta f_i(x), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y_{i,m-k} &= \varepsilon^k \Delta_k f_i(x), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y_{i1} &= \varepsilon^{m-1} \Delta_{m-1} f_i(x),
\end{aligned}
\right.
$$

absolument comme dans les nos 80 et 81 du Chapitre IV, les différences Δ étant prises par rapport à l'accroissement ω de x. Vérifions, en effet, que ces formules sont vraies. Nous aurons

$$
\begin{aligned}
Y_{m-k} &= \varepsilon^{k+1} \Delta_k f(x+\omega) \\
&= \varepsilon^{k+1} [\Delta_k f(x) + \Delta_{k+1} f(x)] \\
&= \varepsilon y_{m-k} + y_{m-k-1}.
\end{aligned}
$$

Mais, dans le calcul de $\Delta f(x)$, il faut bien remarquer que l'on a

$$f(x) = \varpi_1(x) + x\,\varpi_2(x) + \ldots = e^{rx}[p_1(x) + x\,p_2(x) + \ldots];$$

de sorte que l'on a

$$f(x+\omega) = e^{r\omega} e^{rx}[p_1(x+\omega) + (x+\omega)\,p_2(x+\omega) + \ldots]$$

ou

$$f(x+\omega) = \varepsilon[\varpi_1(x) + (x+\omega)\,\varpi_2(x) + \ldots],$$

et, par suite, dans le calcul des Δ successifs de $f(x)$, il faut changer x en $x+\omega$ seulement en dehors des coefficients $\varpi(x)$, ces coefficients étant considérés comme des constantes, et ensuite multiplier par ε à chaque nouvel accroissement Δ.

On peut encore dire que chaque groupe de solutions peut être représenté par des expressions de la forme

$$
(153)\quad \left\{
\begin{aligned}
y_{im} &= e^{rx} \varphi^1_{im}, \\
y_{i,m-1} &= e^{rx}[\varphi^1_{i,m-1} + x \varphi^2_{i,m-1}], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y_{i1} &= e^{rx}[\varphi^1_{i1} + x \varphi^2_{i1} + \ldots + x^{m-1} \varphi^m_{i1}],
\end{aligned}
\right.
$$

les fonctions φ des seconds membres étant *périodiques* de première espèce, et liées entre elles par des relations qu'on déduit facilement des équations (152).

108. On peut considérer les équations

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n$$

à coefficients constants comme des équations à coefficients périodiques, de période arbitraire ω. Considérons le groupe précédent de solutions. r y est arbitraire avec ω. Mais, si l'on se donne ω, r est déterminé par la relation $\varepsilon = e^{r\omega}$. On retrouve le résultat bien connu, c'est-à-dire que les racines ε de l'*équation fondamentale* sont liées aux racines r de l'*équation caractéristique* par la relation $\varepsilon = Ce^r$, C étant une constante. De plus, on trouve que les formes sont celles qui conviennent aux éléments des solutions du système (A).

109. Considérons maintenant un système d'équations

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,$$

dont les coefficients a sont *doublement périodiques*, et dont l'intégrale générale est uniforme, avec le seul point $x = \infty$ pour point singulier.

Nous poserons, d'une manière générale,

$$P_m(x) = \varpi_0(x) + x\,\varpi_1(x) + \ldots + x^m\,\varpi_m(x),$$

les fonctions $\varpi(x)$ étant périodiques de seconde espèce, à la période ω et au même multiplicateur ε, et

$$P'_m(x) = \varpi'_0(x) + x\,\varpi'_1(x) + \ldots + x^m\,\varpi'_m(x),$$

les fonctions ϖ' étant périodiques de seconde espèce, à la période ω', et au même multiplicateur ε'.

D'après les formules (152) du n° 107, le système (A) admet un système fondamental de solutions dont chaque groupe est de la forme

$$(154) \qquad \begin{cases} y_{i,m} \;\;\;= P_{0,i}(x), \\ y_{i,m-1} = P_{1,i}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{i,1} \;\;\;\;= P_{m-1,i}(x). \end{cases}$$

Ce groupe appartient à un multiplicateur ε, racine d'une équation fondamentale $R(\varepsilon) = 0$.

D'ailleurs, d'après les théories générales du Chapitre IV, toute solution appartenant au même multiplicateur est une combinaison linéaire d'éléments caractérisés par les relations (154). Observons cependant qu'il peut y avoir plus d'un groupe de relations de cette nature.

En d'autres termes, soit $R(\varepsilon) = 0$ l'équation fondamentale aux multiplicateurs; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\mu$ les racines distinctes de cette équation. A l'une de ces racines ε_k d'ordre de multiplicité μ_k correspondront un ou plusieurs groupes de relations de la forme

$$\left.\begin{array}{l} y^{k'}_{im_{k'}} = P^{k'}_{0i}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{k'}_{i1} \quad = P^{k'}_{m_{k'}-1}(x) \end{array}\right\} \qquad (k' = 1, 2, \ldots, \nu_k),$$

de manière que, ν_k étant le nombre de ces groupes, le nombre total des relations soit μ_k. *Toute solution appartenant au seul multiplicateur ε_k est une combinaison linéaire des μ_k solutions précédentes.*

Ce théorème résulte de considérations identiques à celles qui terminent le Chapitre IV.

Mais on peut le démontrer directement sous l'énoncé suivant :

S'il existe une relation identique de la forme

$$C_1 A_{i1} + \ldots + C_\mu A_{i\mu} = 0 \tag{155}$$

entre des solutions formant l'ensemble A_{i1} appartenant au multiplicateur ε_1, des solutions formant l'ensemble A_{i2} appartenant au multiplicateur $\varepsilon_2, \ldots,$ des solutions formant l'ensemble $A_{i\mu}$ appartenant au multiplicateur ε_μ; les C étant d'ailleurs des constantes, on a séparément

$$A_{i1} = 0, \qquad A_{i2} = 0, \qquad \ldots, \qquad A_{i\mu} = 0.$$

En effet, donnons à x les valeurs successives $x + \omega, x + 2\omega, \ldots, x + \overline{\mu - 1}\,\omega$, et désignons par $F^{\eta_1}_{i1}, F^{\eta_2}_{i2}, \ldots, F^{\eta_\mu}_{i\mu}$ les coefficients des plus hautes puissances de x dans les groupements $A_{i1}, \ldots, A_{i\mu}$, nous aurons

$$C_1 A_{i1}(x + \lambda\omega) + \ldots + C_\mu A_{i\mu}(x + \lambda\omega) = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1).$$

Si l'on élimine les C entre ces μ équations et si l'on ordonne l'équation obtenue par rapport à x, on aura

$$F_{i1} + x F_{i2} + \ldots + x^\eta F^\eta_{i\mu} = 0, \tag{156}$$

où les fonctions F sont périodiques de seconde espèce au multiplicateur $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\mu$.

Cela résulte de la forme même de cette équation quand on l'écrit

$$\begin{vmatrix} A_{i1}(x) & \dots & A_{i\mu}(x) \\ A_{i1}(x+\omega) & \dots & A_{i\mu}(x+\omega) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ A_{i1}(x+\overline{\mu-1}\,\omega) & \dots & A_{i\mu}(x+\overline{\mu-1}\,\omega) \end{vmatrix} = 0.$$

De plus, la relation (156), dont le premier membre est considéré comme un polynome en x, doit être identique, sans quoi l'équation algébrique de degré η en x aurait une infinité de racines. En effet, cette équation pourrait aussi s'écrire

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_\mu)^\lambda \left[F_{i1} + (x+\lambda\omega) F_{i2} + \dots + (x+\lambda\omega)^\eta F_{i\mu}^\eta \right] = 0,$$

quelle que soit la valeur de λ. Il faut donc que le coefficient $F_{i\mu}^\eta$ soit nul en particulier. Or, ce coefficient est

$$F_{i\mu}^\eta(x) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_\mu \\ \varepsilon_1^2 & \dots & \varepsilon_\mu^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_1^{\mu-1} & \dots & \varepsilon_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix} F_{i1}^{\eta_1} F_{i2}^{\eta_2} \dots F_{i\mu}^{\eta_\mu},$$

c'est-à-dire que $F_{i\mu}^\eta(x)$ est un produit de facteurs dont aucun n'est nul par hypothèse.

Donc, la relation (155) ne peut exister que si l'on a $C_1 = 0, \dots, C_\mu = 0$, ou encore, la relation ne peut résulter que des relations séparées

$$A_{i1} = 0, \qquad \dots, \qquad A_{i\mu} = 0.$$

110. Le théorème précédent se traduit d'une manière remarquable par un rapprochement entre deux déterminants $R(\varepsilon)$, $R(\varepsilon')$.

Considérons, en effet, les groupes des solutions qui correspondent à la période ω et au multiplicateur ε_k comme formant un groupe unique; appelons G ce groupe. Le nombre des solutions contenues dans G est μ_k, c'est-à-dire le degré de multiplicité de la racine ε_k dans l'équation $R(\varepsilon) = 0$.

Toute solution qui admet le seul multiplicateur ε_k se tire d'ailleurs de G par des combinaisons linéaires.

Cela posé, soit $\varphi_{ij}(x)$ une solution quelconque contenue dans G, $\varphi_{ij}(x+\omega')$ sera aussi une solution puisque les coefficients du système différentiel proposé (A) admettent aussi la période ω'. On devra donc avoir

$$\varphi_{ij}(x+\omega') = L_{i1}\varphi_{i1} + \dots + L_{i\mu_k}\varphi_{i\mu_k} \qquad (j = 1, 2, \dots, \mu_k).$$

Ces relations étant absolument les mêmes que les relations (151) du n° 101, on en déduit immédiatement les mêmes conséquences, à savoir celles du n° 104.

On peut diviser les relations φ_{ij} en groupes correspondant aux diviseurs élémentaires du déterminant

$$R(\varepsilon') = \begin{vmatrix} L_{11} - \varepsilon' & \dots & L_{1\mu_k} \\ \dots\dots & \dots & \dots \\ L_{\mu_k 1} & \dots & L_{\mu_k\mu_k} - \varepsilon' \end{vmatrix},$$

de manière que, si $(\varepsilon'_h - \varepsilon)^{e_h}$ *est un diviseur élémentaire de* $R(\varepsilon')$, *on ait un groupe de solutions linéairement indépendantes qui satisfassent aux relations*

$$(157) \qquad Y_{i\sigma} = \varepsilon'_h y_{i\sigma} + y_{i,\sigma-1} \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, e_h).$$

Nous retiendrons de ce théorème qu'*à toute racine distincte de l'équation* $R(\varepsilon) = 0$ *correspond au moins une solution satisfaisant à l'équation* $Y_i = \varepsilon' y_i$, ε' *étant une racine de* $R(\varepsilon') = 0$, *et nécessairement aussi une racine de* $R_1(\varepsilon') = 0$, *c'est-à-dire de l'équation fondamentale relative à la période* ω'.

En conséquence, puisque à toute racine ε correspond au moins une racine ε' et *réciproquement, il faut que les deux équations* $R(\varepsilon) = 0$, $R_1(\varepsilon') = 0$ *admettent le même nombre de racines distinctes* et ces racines correspondent au nombre de groupements incompatibles entre eux qu'on peut faire avec les solutions, comme on l'a expliqué au numéro précédent.

111. Maintenant que les déterminants $R(\varepsilon)$, $R(\varepsilon')$ ne se décomposent pas en diviseurs élémentaires parallèles, le fait est possible, comme l'a prouvé M. Floquet [*Sur les équations linéaires à coefficients doublement périodiques* (*Annales de l'École Normale supérieure,* n° 29; 1884)]. Il existe cependant des rapports entre les deux décompositions en diviseurs élémentaires et la nature des solutions. Par exemple, si l'un des déterminants $R(\varepsilon)$ n'a que des diviseurs élémentaires simples, il en est de même de $R(\varepsilon')$ et le système proposé a tous les éléments de ses solutions de forme doublement *périodique de seconde espèce* (Floquet, *loc. cit.*, n° 6). Sans insister sur ces considérations, malgré l'intérêt qu'elles présentent, nous signalerons les beaux résultats donnés dans un cas particulier par M. Picard (*Journal de Crelle,* 1881).

Considérons les trois équations

$$(158) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = -Av + Bw, \\ \dfrac{dv}{dx} = Au - Cw \\ \dfrac{dw}{dx} = -Bu + C \end{cases}$$

Remarquons en passant que ce système jouit de la singulière propriété de coïncider avec le système obtenu en changeant les signes de A, B, C et en permutant les coefficients symétriques par rapport à la diagonale principale du déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & -A & B \\ A & 0 & -C \\ -B & C & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point, et d'une manière plus générale, dans le Chapitre VII.

Nous supposerons que A, B, C sont des fonctions doublement périodiques ordinaires de x aux périodes $2k$ et $2ik'$.

Admettons que les éléments du système (158) soient des fonctions uniformes dans tout le plan, comme les coefficients des équations proposées.

(α). Soient

$$(159) \qquad \begin{cases} u_1, v_1, w_1, \\ u_2, v_2, w_2, \\ u_3, v_3, w_3 \end{cases}$$

trois solutions distinctes. On aura identiquement

$$(160) \qquad u_m u_n + v_m v_n + w_m w_n = C_{mn}, \qquad (m, n = 1, 2, 3),$$

à cause des équations (158) satisfaites par deux solutions quelconques, même confondues pour $m = n$. Il y a six relations de la forme (160).

Nous imaginons que chacune des solutions correspond à un multiplicateur ε_m pour la période $2k$ et à un multiplicateur ε'_m pour la période $2ik'$, m prenant les valeurs successives 1, 2, 3.

1° Supposons que les constantes C_{11}, C_{22}, C_{33} ne soient pas nulles toutes les trois, et soit $C_{11} \gtrless 0$. Alors la fonction $u_1^2 + v_1^2 + w_1^2$ admettant les multiplicateurs ε_1^2 et $\varepsilon_1'^2$ et n'étant pas nulle, on devra avoir $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1'^2 = 1$, puisque le changement de x en $x + 2k$ et en $x + 2ik'$ ne peut altérer C_{11}. Donc le système (158) admet au moins une solution *doublement périodique*.

2° Si l'on a $C_{11} = C_{22} = C_{33} = 0$, les trois autres constantes ne peuvent être nulles à la fois. Car, si les six constantes étaient nulles, on tirerait des équations (160), pour une solution quelconque U, V, W,

$$U^2 + V^2 + W^2 = 0,$$

ce qui est impossible puisque, pour une valeur donnée de x, on peut imaginer arbitrairement les valeurs de U, V, W.

Soit alors $C_{12} \gtrless 0$. La fonction

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2$$

admettra les multiplicateurs $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ et $\varepsilon'_1 \varepsilon'_2$, et aura une valeur constante différente de zéro. On aura donc

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 = 1.$$

Mais le déterminant formé par le tableau (159), a pour valeur

$$C e^{\int o.x dx} = \text{une constante}.$$

D'ailleurs, il admet les multiplicateurs $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ et $\varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \varepsilon'_3$. On a donc aussi

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \varepsilon'_3 = 1.$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$\varepsilon_3 = \varepsilon'_3 = 1,$$

c'est-à-dire que le système (158) admet encore au moins une solution *doublement périodique*.

(β). Nous rappelons que nous appelons *fonction périodique de seconde espèce* toute fonction qui admet les deux multiplicateurs ε et ε' dont l'un au moins diffère de l'unité, et nous avons supposé, dans le cas (α), que le système (158) admettait trois solutions de cette nature. Nous en avons conclu l'existence d'une solution doublement périodique au sens ordinaire du mot.

Nous supposerons maintenant que le système (158) n'admet que deux solutions u_1, v_1, w_1 et u_3, v_3, w_3 doublement périodiques de seconde espèce, et nous imaginerons une troisième solution u_2, v_2, w_2 distincte des premières. Nous avons vu dans la théorie générale qu'on peut choisir cette solution de sorte que l'on ait

$$u_2(x+2k) = \varepsilon_1 u_2 + a u_1,$$
$$v_2(x+2k) = \varepsilon_1 v_2 + a v_1,$$
$$w_2(x+2k) = \varepsilon_1 w_2 + a w_1,$$

a étant une constante; on aura aussi et en même temps

$$u_2(x+2ik') = \varepsilon'_1 u_2 + b u_1,$$
$$v_2(x+2ik') = \varepsilon'_1 w_2 + b v_1,$$
$$w_2(x+2ik') = \varepsilon'_1 w_2 + b w_1.$$

Si l'une des constantes C_{11} ou C_{33}, par exemple C_{11} n'est pas nulle, on a vu qu'il existe une solution doublement périodique.

Le seul cas à discuter est celui où l'on a $C_{11} = C_{33} = 0$. Si C_{12} n'est pas nul,

on aura $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1'^2 = 1$, car l'expression $u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2$ se transforme, par le changement de x en $x + 2k$, en $\varepsilon_1^2(u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2)$. On aura donc $\varepsilon_1^2 = 1$ et de même $\varepsilon_1'^2 = 1$. Donc il existe une solution doublement périodique.

Si C_{11}, C_{33}, C_{12} sont nulles à la fois, soit $C_{22} \gtrless 0$. L'expression $u_2^2 + v_2^2 + w_2^2$ devient, en changeant x en $x + 2k$, $\varepsilon_1^2(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)$, d'où l'on tire encore les mêmes conclusions que dans les cas précédents.

Si C_{11}, C_{33}, C_{22}, C_{12} sont nulles à la fois, soit $C_{13} \gtrless 0$, on aura $\varepsilon_1 \varepsilon_3 = 1$, et, si enfin $C_{13} = 0$, on aura encore la relation $\varepsilon_1 \varepsilon_3 = 1$, car on a

$$u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3 = C_{23},$$

et nécessairement $C_{23} \lesseqgtr 0$, comme on l'a vu plus haut.

Mais le tableau (159) est un déterminant constant qui donne les relations

$$\varepsilon_1^2 \varepsilon_3 = 1 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1'^2 \varepsilon_3' = 1,$$

quand on change x en $x + 2k$ ou en $x + 2ik'$. Donc, à cause de l'une des relations

$$\varepsilon_1^2 = 1, \qquad \varepsilon_3^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_3 = 1,$$

et de celles qu'on vient d'écrire, l'un des multiplicateurs ε_1 ou ε_3 sera égal à 1, l'autre ε' étant égal à ± 1. *Dans le cas de* $\varepsilon' = -1$, *on considérera la période* $4ik'$. Donc, il y a une solution *doublement périodique* comme dans les cas précédents.

(γ). Supposons enfin qu'il n'y ait qu'une solution $u_1 v_1 w_1$ doublement périodique de seconde espèce, deux autres solutions pouvant être choisies de manière à satisfaire aux relations

$$\begin{aligned}
u_2(x + 2k) &= \varepsilon_1 u_2 + a u_1, \\
v_2(x + 2k) &= \varepsilon_1 v_2 + a v_1, \\
w_2(x + 2k) &= \varepsilon_1 w_2 + a w_1, \\
u_3(x + 2k) &= \varepsilon_1 u_3 + b u_2 + c u_1, \\
v_3(x + 2k) &= \varepsilon_1 v_3 + b v_2 + c v_1, \\
w_3(x + 2k) &= \varepsilon_1 w_3 + b w_2 + c w_1.
\end{aligned}$$

On verra, au moyen des équations (160), que l'on a toujours $\varepsilon_1^2 = 1$. D'ailleurs le déterminant (148), qui est constant, permet de poser $\varepsilon_1^3 = 1$: on aura donc $\varepsilon_1 = 1$. De même, $\varepsilon_1' = 1$. Il y a donc encore dans le cas (γ) une solution *doublement périodique*.

112. Pour déterminer les formes analytiques des éléments des solutions satisfaisant à la fois aux conditions (154) du n° 109 et aux conditions (157) du n° 110,

nous rappellerons d'abord quelques propositions de la théorie des fonctions elliptiques.

On démontre l'existence d'une fonction θ satisfaisant aux relations

$$\theta(x+\omega) = \theta(x),$$
$$\theta(x+\omega') = \theta(x) e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}(x+c)},$$

De ces relations on déduit, en prenant les dérivées logarithmiques,

$$\frac{\theta'(x+\omega)}{\theta(x+\omega)} = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)},$$
$$\frac{\theta'(x+\omega')}{\theta(x+\omega')} = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega},$$

de sorte que, si l'on pose $Z(x) = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)}$, on a les relations

$$Z(x+\omega) = Z(x).$$
$$Z(x+\omega') = Z(x) + q,$$
$$\omega q = -2\pi\sqrt{-1}.$$

Au moyen de la fonction $Z(x)$ construisons les fonctions

$$u(x) = \frac{\omega\omega'}{2\pi\sqrt{-1}} Z(x) \qquad \text{et} \qquad u(x) = -\frac{\omega\omega'}{2\pi\sqrt{-1}}\left[Z(x) - \frac{qx}{\omega'}\right].$$

Nous aurons les relations

$$u(x+\omega) = u(x), \qquad u'(x+\omega) = u'(x) - \omega,$$
$$u(x+\omega') = u(x) - \omega', \qquad u'(x+\omega') = u'(x)$$

et

$$u + u' + x = 0.$$

Nous allons montrer qu'on peut exprimer les éléments des solutions des systèmes à coefficients périodiques et à intégrales uniformes au moyen de ces fonctions $u(x)$ et $u'(x)$.

113. Considérons l'expression

$$P_m(x) = \varpi_0(x) + \ldots + x^m \varpi_m(x),$$

de multiplicateur ε par rapport à la période ω, et admettant ω' comme seconde période avec le multiplicateur ε'; nous aurons

$$P(x+\omega') = \varepsilon' P(x),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\varpi_0(x+\omega')+(x+\omega')\varpi_1(x+\omega')+\ldots+(x+\omega')^m\varpi_m(x+\omega')\\ =\varepsilon'[\varpi_1(x)+x\varpi_1(x)+\ldots+x^m\varpi_m(x)].\end{aligned}$$

Identifions les deux membres par rapport aux diverses puissances de x, nous aurons les $m+1$ équations

$$\begin{aligned}&\varpi_{m-k}(x+\omega')+\frac{m-k+1}{1}\omega'\varpi_{m-k+1}(x+\omega')\\ &\quad+\frac{(m-k+1)(m-k+2)}{2}\omega'^2\varpi_{m-k+2}(x+\omega')+\ldots\\ &\quad+\frac{(m-k+1)(m-k+2)\ldots(m-1)m}{1.2\ldots k}\omega'^k\varpi_m(x+\omega')\\ &\qquad=\varepsilon'\varpi_{m-k}(x)\qquad (k=0,1,2,\ldots,m).\end{aligned}$$

Ces équations donnent

$$(161)\quad\left\{\begin{aligned}&\varpi_m(x+\omega')=\varepsilon'\varpi_m(x),\\ &\varpi_{m-1}(x+\omega')=-\frac{m}{1}\varepsilon'\omega'\varpi_m(x)+\varepsilon'\varpi_{m-1}(x),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\varpi_{m-k}(x+\omega')=(-1)^k\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}\varepsilon'\omega'^k\varpi_m(x)+\ldots\\ &\qquad-\frac{m-k+1}{1}\varepsilon'\omega'\varpi_{m-k+1}(x)+\varepsilon'\varpi_{m-k}(x),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\varpi_0(x+\omega')=(-1)^m\varepsilon'\omega'^m\varpi_m(x)+\ldots+\varepsilon'\varpi_0(x).\end{aligned}\right.$$

De ces relations, nous déduisons les conséquences suivantes.

Soit posé

$$\varpi_m(x)=\varpi_{00}(x),$$

on a

$$\frac{\varpi_{m-1}(x+\omega')}{\varpi_m(x+\omega')}=\frac{\varpi_{m-1}(x)}{\varpi_m(x)}-m\omega'.$$

Par suite, la fonction

$$\frac{\varpi_{m-1}(x)}{\varpi_m(x)}-mu(x)$$

est uniforme et périodique aux deux périodes ω et ω'.

Soit $\chi_1(x)$ cette fonction doublement périodique.

Posons

$$\chi_1(x)\varpi_m(x)=\varpi_{10}(x).$$

Nous pourrons écrire

$$\varpi_{m-1}(x)=\varpi_{10}(x)+\frac{m}{1}\varpi_{00}(x)u(x).$$

Nous allons montrer que l'on peut poser, en général,

$$(162)\qquad \begin{cases} \varpi_{m-k}(x) = \varpi_{k0}(x) + \dfrac{m-k+1}{1}\varpi_{k-1,0}(x)u(x) \\ \quad + \dfrac{(m-k+2)(m-k+1)}{1.2}\varpi_{k-2,0}(x)u^2(x) + \ldots \\ \quad + \dfrac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}\varpi_{00}(x)u^k(x). \end{cases}$$

Admettons que la loi soit vraie pour l'indice $k-1$, nous pourrons toujours écrire la relation (162) où $\varpi_{k0}(x)$ est une fonction à déterminer.

Cette fonction $\varpi_{k0}(x)$ sera nécessairement uniforme, périodique de seconde espèce avec la période ω et le multiplicateur ε; nous allons voir qu'elle admet encore comme les autres fonctions ϖ_{j0} la période ω' avec le multiplicateur ε'. En effet, on a

$$\varpi_{m-k}(x+\omega') = \varpi_{k0}(x+\omega') + \varepsilon'\frac{m-k+1}{1}\varpi_{k.1,0}(x)[u(x)-\omega'] + \ldots$$
$$+ \varepsilon'\frac{m(m-1)\ldots m-k+1}{1.2\ldots k}\varpi_{00}(x)[u(x)-\omega']^k.$$

D'ailleurs, l'une des relations (150) donne

$$\varpi_{m-k}(x+\omega') = (-1)^k\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}\varepsilon'\omega'^k\varpi_{00}(x) + \ldots$$
$$+ \varepsilon'\left[\varpi_{k0}(x) + \frac{m-k+1}{1}\varpi_{k-1,0}(x)u(x) + \ldots\right].$$

En égalant ces deux valeurs de $\varpi_{m-k}(x+\omega')$, on a

$$\varpi_{k0}(x+\omega') = \varepsilon'\varpi_{k0}(x),$$

ce qui démontre la proposition qu'on avait en vue.

114. On déduit de ce qui précède que l'on a

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \varpi_0(x) + \ldots + x^m\varpi_m(x) \\ &= [\varpi_{m0}(x) + x\varpi_{m-1,0}(x) + \ldots + x^m\varpi_{00}(x) \\ &\quad + \frac{u(x)}{1}[\varpi_{m-1,0}(x) + 2x\varpi_{m-2,0}(x) + \ldots + mx^{m-1}\varpi_{00}(x)] \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + \frac{[u(x)]^m}{1.2\ldots m}m(m-1)\ldots2.1\,\varpi_{00}(x). \end{aligned}$$

Chacune de ces parenthèses est une dérivée de la première d'entre elles, lors-

qu'on y considère les fonctions ϖ_{j0} comme des constantes. On peut écrire, avec cette convention,

$$P_m(x) = \Pi(x) + \frac{u(x)}{1}\frac{\partial \Pi(x)}{\partial x} + \ldots + \frac{[u(x)]^m}{1.2\ldots m}\frac{\partial^m \Pi(x)}{\partial x^m}.$$

Remplaçons x par $x + u(x)$ en dehors des $\varpi_{j0}(x)$ dans $\Pi(x)$, nous aurons précisément l'expression $P_m(x)$ que nous venons d'écrire.

Mais $x + u(x) = -u'(x)$. On a donc

$$P_m(x) = \varpi_{m0}(x) - \varpi_{m-1,0}(x)u'(x) + \varpi_{m-2,0}(x)[u'(x)]^2 + \ldots + (-1)^m \varpi_{00}(x)u'^m(x),$$

ce que l'on peut écrire

$$P_m(x) = \pi_0(x) + \pi_1(x)u'(x) + \ldots + \pi_m(x)u'^m(x),$$

en posant

$$(-1)^j \varpi_{m-j,0}(x) = \pi_j(x),$$

et en particulier

$$\pi_m(x) = (-1)^m \varpi_{00}(x) = (-1)^m \varpi_m(x).$$

Donc, quand la forme P_m *admet le multiplicateur* ε' *pour une seconde période* ω', *on peut poser*

$$P_m = \pi_0(x) + \ldots + \pi_m(x)u'^m(x), \tag{163}$$

les fonctions $\pi(x)$ *étant doublement périodiques de seconde espèce et aux multiplicateurs* ε, ε' *avec les périodes* ω, ω'. *Les deux formes de* P_m *sont toujours du même degré en* x *et* $u'(x)$. *Car les coefficients* $\varpi_m(x)$ *et* $\pi_m(x)$ *des termes du plus haut degré sont égaux au signe près.*

115. De même, l'expression P'_m au multiplicateur ε' avec la période ω', admettant ω comme période de seconde espèce au multiplicateur ε, peut se mettre sous la forme

$$P'_m = \pi'_0(x) + \pi'_1(x)u(x) + \ldots + \pi'_{m'}(x)u^{m'}(x), \tag{164}$$

les fonctions π' étant périodiques doubles de seconde espèce.

116. *Si une fonction* $F(x)$ *peut se mettre sous les deux formes* $P_m(x)$ *et* $P'_0(x)$, *on peut lui donner la forme* (163). *De même, si elle admet les deux formes* $P_0(x)$ *et* $P'_{m'}(x)$, *on peut lui donner la forme* (164).

Cet énoncé est le résumé des numéros précédents.

117. Cherchons maintenant l'expression d'une fonction $F(x)$ capable des deux formes $P_m(x)$ et $P'_{m'}(x)$ où aucun des deux nombres m ou m' n'est nul.

Supposons que l'on puisse ramener la forme

$$P_m(x) = \varpi_0(x) + \ldots + x^m \varpi_m(x)$$

à la forme

$$P_{m'}(x) = \varpi'_0(x) + \ldots + x^{m'} \varpi_{m'}(x).$$

Il faudra que l'on ait identiquement

$$\varpi_0(x) + \ldots + x^m \varpi_m(x) = P'_{m'}(x),$$

et par suite, en changeant x successivement en $x + \omega$, $x + 2\omega$, ..., on aura les relations

$$(165) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varpi_0(x) + \ldots + x^m \varpi_m(x) = P'_{m'}(x), \\ \varepsilon \varpi_0(x) + \ldots + (x + \omega)^m \varepsilon \varpi_m(x) = P'_{m'}(x + \omega), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varepsilon^m \varpi_0(x) + \ldots + (x + m\omega)^m \varepsilon^m \varpi_m(x) = P'_{m'}(x + m\omega) \end{array} \right.$$

suffisantes pour déterminer $\varpi_0(x)$, ..., $\varpi_m(x)$. On aura

$$\varpi_k(x) = \frac{1}{\Delta}[\Delta_0 P'_{m'}(x) + \ldots + \Delta_m P'_{m'}(x + m\omega)],$$

et il est facile de calculer les déterminants Δ.

Dans le dénominateur commun Δ, on peut mettre en facteur

$$\varepsilon^{1+2+\ldots+m} = \varepsilon^{\frac{m(m+1)}{2}},$$

et l'autre facteur devient le produit des différences mutuelles des $m + 1$ quantités $x, x + \omega, \ldots, x + m\omega$, c'est-à-dire est égal à

$$\omega^{\frac{m(m+1)}{2}} . 1^m . 2^{m-1} \ldots (m-1)^2 m^1.$$

On a donc

$$\Delta = (\varepsilon\omega)^{\frac{m(m+1)}{2}} . 1^m . 2^{m-1} \ldots (m-1)^2 m^1.$$

Quand à l'un quelconque Δ_j des autres déterminants, on l'obtient en supprimant la $(j + 1)^{\text{ième}}$ ligne et $(k + 1)^{\text{ième}}$ colonne. On peut donc mettre $\varepsilon^{\frac{m(m+1)}{2} - j}$ en facteur et l'on a un second facteur qui est le produit des différences mutuelles des m quantités $x + \lambda\omega$ (où $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m$) multiplié par la somme $S_{j,m-k}$ de leurs produits $m - k$ à $m - k$. On a donc, après un calcul facile,

$$\Delta_j = (-1)^{m+k} \varepsilon^{\frac{m(m+1)}{2} -} \omega^{\frac{m(m-1)}{2}} 1^{m-1} . 2^{m-2} \ldots (m-1)^1 C_m^j S_{j,m-k},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Delta_j}{\Delta} = (-1)^{m+k} \frac{C_m^j \varepsilon^{m-j} S_{j,m-k}}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m},$$

où C_m^j est le nombre des combinaisons de m objets j à j.

Par suite, on a

$$\varpi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \left\{ \begin{array}{l} C_m^0 S_{0,m-k} \varepsilon^m P'_{m'}(x) - C_m^1 S_{1,m-k} \varepsilon^{m-1} P'_{m'}(x+\omega) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} \varepsilon S_{m-1,m-k} P'_{m'}(x + \overline{m-1}\,\omega) \\ + (-1)^m C_m^m S_{m,m-k} P'_{m'}(x+m\omega) \end{array} \right\}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

Si l'on pose d'une manière générale

$$f(x+m\varpi) - C_m^{m-1} \varepsilon f(x + \overline{m-1}\,\omega) + \ldots + (-1)^m \varepsilon^m f(x) = \delta_{\omega\varepsilon}^{(m)} f(x),$$

on aura, en particulier,

$$\varpi_m(x) = \frac{1}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \delta_{\omega\varepsilon}^m P'_{m'}(x).$$

On voit, par conséquent, que $\varpi_k(x)$ est une fonction linéaire homogène des quantités $P'_{m'}(x)$, ..., $P'_{m'}(x+m\omega)$, dont les coefficients sont des polynomes en x *tous de degré* $m-k$. Or, ces quantités P' sont des expressions de même forme que $P'_{m'}(x)$, de même multiplicateur ε' et de même degré m'. Donc $\varpi_k(x)$ est une expression de la forme $P'_{m'}(x)$ de même multiplicateur ε' et d'un degré égal ou inférieur à $m'+m-k$.

Faisant successivement $k = m, m-1, \ldots, 1, 0$, on aura pour $\varpi_m(x)$, $\varpi_{m-1}(x), \ldots, \varpi_1(x)$, $\varpi_0(x)$ des expressions de la forme $P'_{m'}(x)$ du même multiplicateur ε', mais de degrés respectivement égaux ou inférieurs à m', $m'+1$, $m'+m-1$, $m'+m$. Les coefficients des termes du plus haut degré sont dans ces expressions

$$(166)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{C_m^0}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \delta_{\omega\varepsilon}^m \varpi'_{m'}(x), \\ \dfrac{-C_m^1}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \delta_{\omega\varepsilon}^m \omega'_{m'}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{(-1)^m C_m^m}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \delta_{\omega\varepsilon}^m \varpi'_{m'}(x), \end{array} \right.$$

et ne diffèrent mutuellement que par des facteurs constants.

Donc, si les deux formes $P_m(x)$ *et* $P'_{m'}(x)$ *représentent une même fonction, chaque* coefficient de l'une admet la forme de l'autre ainsi que son multiplica-

teur, mais avec un degré égal ou inférieur à la différence entre $m + m'$ et l'exposant de la puissance de x qui multiplie ce coefficient.

Pour $m' = 0$, on voit que $\varpi_m(x)$ est du degré zéro, c'est-à-dire, ce qu'on a déjà vu, que si $P_m(x)$ admet la période ω' au multiplicateur ε', le coefficient $\varpi_m(x)$ de la plus haute puissance de x est doublement périodique de seconde espèce comme $P_m(x)$ lui-même.

118. Soit maintenant $F(x)$ capable des deux formes $P_m(x)$, $P'_{m'}(x)$; il faut que les coefficients $\varpi_j(x)$ de $P_m(x)$ soient de la forme $P'_{m'}(x)$ avec des degrés respectivement égaux, en général, à m', $m'+1$, $m'+m$. On aura donc

$$\varpi_{m-k}(x) = \varpi'_{k0}(x) + \ldots + x^{m'+k}\,\varpi'_{k,m+k}(x) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

les fonctions ϖ' à deux indices étant entièrement analogues aux fonctions ϖ' à un seul indice dans $P'_{m'}(x)$. Remarquons que l'on a, d'après la formule (166),

$$\varpi'_{k,m'+k}(x) = \frac{(-1)^k C_m^k}{(\varepsilon\omega)^m\, 1.2\ldots m}\, \delta_{\omega\varepsilon}^m\, \varpi'_{m'}(x).$$

Mais le second membre de l'équation (166) admet comme le premier membre la période ω et le multiplicateur ε. On a donc

$$\varpi_{m-k}(x) = \Pi'_{k0}(x) + \Pi'_{k1}(x)\,u(x) + \ldots + \Pi'_{k,m'+k}(x)\,u^{m'+k}(x),$$

où les fonctions Π' sont doublement périodiques de seconde espèce aux multiplicateurs ε et ε'.

Rappelons en même temps que l'on a

$$\Pi'_{k,m'+k}(x) = (-1)^{m'+k}\,\varpi'_{k,m'+k}(x).$$

La fonction considérée $F(x)$, qui est égale à $P_m(x)$, s'exprime de la manière suivante

$$F(x) = U_{m+m'} + x\,U_{m+m'-1} + \ldots + x^m\,U_{m'},$$

en désignant par $U_{m'-k}$ un polynome en $u(x)$ de degré $m'+k$, dont les coefficients sont doublement périodiques de seconde espèce aux multiplicateurs ε et ε'.

119. Si l'on dirige le calcul de manière que l'expression $P'_{m'}(x)$ soit susceptible de la forme $P_m(x)$ on obtiendra pour $F(x)$ l'expression

$$F(x) = U'_{m+m'} + x\,U'_{m+m'-1} + \ldots + x^{m'}\,U'_m,$$

où U'_{m+k} désigne un polynome en $u'(x)$ de degré $m+k$, dont les coefficients sont doublement périodiques de seconde espèce aux multiplicateurs ε, ε'.

Nous nous proposons de mettre $F(x)$ sous une forme finale qui renferme à la

fois les deux formes $P_m(x)$ et $P'_{m'}(x)$. Mais nous aurons besoin de quelques théorèmes préliminaires.

120. *Si le polynome en* $u(x)$

$$\psi'_0(x) + \psi'_1(x)\, u(x) + \ldots + \psi'_\rho(x)\, u^\rho(x),$$

dont les coefficients ψ' *admettent la période* ω' *au multiplicateur* ε', *est nul identiquement, tous ses coefficients sont identiquement nuls.*

On a, en effet,

$$\psi'_0(x + k\omega') + \psi'_1(x + k\omega')\, u(x + k\omega') + \ldots + \psi'_\rho(x + k\omega')\, u^\rho(x + k\omega') = 0,$$

ce qui s'écrit, en divisant par ε^k et quel que soit l'entier k,

$$\psi'_0(x) + \psi'(x)[u(x) - k\omega'] + \ldots + \psi'_\rho[u(x) - k\omega']^\rho = 0.$$

Le polynome en z

$$\psi'_0(x) + \psi'(x) z + \ldots + \psi'_\rho(x) z^\rho$$

a donc infinité de racines et, par suite, les coefficients ψ' sont identiquement nuls.

De même :

Si le polynome en $u'(x)$

$$\psi_0(x) + \psi_1(x)\, u'(x) + \ldots + \psi_{\rho'}(x)[u'(x)]^{\rho'},$$

dont les coefficients admettent la période ω *avec le multiplicateur* ε, *est identiquement nul, tous ses coefficients sont identiquement nuls.*

De ces deux théorèmes, on déduit que :

Si un polynome aux variables $u(x)$ *et* $u'(x)$, *dont les coefficients admettent les périodes* ω *et* ω' *et les multiplicateurs* ε *et* ε', *est identiquement nul, tous ses coefficients sont identiquement nuls.*

En effet, ordonnons-le par rapport à $u(x)$. Les coefficients de $u(x)$ sont de la forme ψ', donc ils sont séparément nuls. Mais ce sont des polynomes en $u'(x)$ dont les coefficients sont de la forme $\psi(x)$. Donc les divers coefficients de ces polynomes sont identiquement nuls.

Comme corollaire :

Si deux polynomes aux deux variables $u(x)$, $u'(x)$ *dont les coefficients*

admettent les périodes ω et ω' avec les multiplicateurs ε et ε' sont identiques, tous leurs coefficients sont identiques chacun à chacun.

121. Nous avons trouvé

$$F(x) = U_{m'+m} + x U_{m'+m-1} + \ldots + x^m U_m.$$

En dehors des U remplaçons x par $-[u(x) + u'(x)$, ce qui est possible, puisque l'on a par définition

$$u + u' + x = 0.$$

Nous aurons

$$F(x) = U_{m'+m} - [u(x) + u'(x)] U_{m'+m-1} + \ldots + (-1)^m [u(x) + u'(x)]^m U_{m'}.$$

C'est un polynome aux deux variables $u(x)$ et $u'(x)$ à coefficients doublement périodiques de seconde espèce, de degré m en $u'(x)$. Je dis qu'il est de degré m' par rapport à $u(x)$.

En effet, on a aussi

$$F(x) = U'_{m+m'} - [u(x) + u'(x)] U'_{m+m'-1} + \ldots + (-1)^m [u(x) + u'(x)]^{m'} U'_m,$$

et cette expression doit être identique à la précédente. D'après les théorèmes du n° 120, il faut que $F(x)$ soit du degré m' par rapport à $u(x)$.

En résumé :

Si une fonction $F(x)$ est capable des deux formes $P_m(x)$ et $P'_{m'}(x)$, elle coïncide avec un polynome aux deux variables $u(x)$ et $u'(x)$ à coefficients doublement périodiques aux périodes ω et ω' et aux multiplicateurs ε et ε'; elle est de degré $m + m'$ en général, et est toujours de degré m en $u'(x)$ et de degré m' en $u(x)$, et ne peut s'exprimer ainsi que d'une seule manière.

122. Nous avons vu que, dans tous les cas, le système (A) du n° 109 admet m solutions distinctes susceptibles chacune des deux formes P et P'.

Il résulte de ce qui précède que les éléments de ces m solutions peuvent être mis sous la forme

$$y_{ik} = R_{ik}(u, u', x),$$

où $R(x, u, u')$ désigne une expression de la nature de $F(x)$ dans le numéro précédent.

123. Comme exemple d'intégration du système (A), nous rappellerons que M. Picard a intégré le système

$$\frac{du}{ds} = \frac{v}{R}, \qquad \frac{dv}{ds} = -\frac{u}{R} - \frac{w}{r}, \qquad \frac{dw}{ds} = \frac{v}{r},$$

où R et r désignent les deux rayons de courbure d'une courbe dont l'arc est s, et u, v, w représentent les neuf cosinus des angles que font avec les axes de coordonnées la tangente, la normale et la binormale de la courbe. M. Picard a intégré ce système de la forme du n° III dans le cas où l'on a

$$\frac{1}{R} = \frac{2n}{a}\,\mathrm{dn}\left(\frac{S}{a}\right), \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{b},$$

a et b étant deux constantes, n un entier positif et $\mathrm{dn}x$ la troisième fonction elliptique.

Nous renverrons, pour cet exemple, le lecteur au Mémoire de M. Picard, où il trouvera les détails nécessaires pour le calcul, et des explications sur l'origine de ces questions dans les profondes recherches de M. Hermite sur l'équation de Lamé

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2x + h]y,$$

où $\mathrm{sn}x$ est la fonction elliptique ordinaire de module k, n un entier positif et h une constante quelconque.

CHAPITRE VII.

DES SYSTÈMES D'ORDRE QUELCONQUE ET THÉORÈMES COMPLÉMENTAIRES.

124. Il est facile d'établir qu'un système d'équations différentielles d'ordre quelconque peut être remplacé par un système d'équations du premier ordre.

Soit, en effet,

$$(167)\qquad F_i\left(x, z, \frac{dz_1}{dx}, \dots, \frac{d^{\lambda_{j1}} z_1}{dx^{\lambda_{j1}}}, \dots, z_n, \frac{dz_n}{dx}, \dots, \frac{d^{\lambda_{jn}} z_n}{dx^{\lambda_{jn}}}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

un système de n équations différentielles, d'ordres variés par rapport à des fonctions $z_1, \dots, z_n$ d'une même variable indépendante x. Ce système renferme autant d'équations que d'inconnues. Prenons pour inconnues auxiliaires les dérivées successives des variables $z_1, \dots, z_n$, nous aurons le nouveau système

$$(168)\qquad \begin{cases} F_i\left(x, z_1, z_1', \dots, z_1^{(\lambda_1-1)}, \dfrac{dz_1^{(\lambda_1-1)}}{dx}, \dots, z_n, \dots, z_n^{(\lambda_n-1)}, \dfrac{dz_n^{(\lambda_n-1)}}{dx}\right) = 0, \\ \dfrac{dz_1}{dx} = z_1', \quad \dots, \quad \dfrac{dz_1^{(\lambda_1-2)}}{dx} = z_1^{(\lambda_1-1)}, \\ \dots\dots, \quad \dots, \quad \dots\dots, \\ \dfrac{dz_n}{dx} = z_n', \quad \dots, \quad \dfrac{dz_n^{(\lambda_n-2)}}{dx} = z_1^{(\lambda_n-1)}, \end{cases}$$

renfermant $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ équations du premier ordre, si l'on appelle λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivement les plus grandes valeurs des nombres $\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jn}$ dans les équations (167).

Il est évident que l'intégration du système (167) entraîne celle du système (168) et réciproquement.

125. On peut remplacer le système (167) par un système analogue au système (168), mais de forme plus symétrique.

En effet, on suppose implicitement dans le système (167) et, par suite, dans le système (168), que les premiers membres des équations, c'est-à-dire les fonctions F des diverses lettres x, z_1, z_1', ..., sont indépendants entre eux. On pourra donc tirer de $n-1$ de ces équations $n-1$ des dérivées $\dfrac{dz^{(\alpha)}}{dx}$ $(\alpha = \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et les porter dans l'une quelconque des autres; en d'autres termes, on pourra éliminer $n-1$ dérivées dans chacune des n premières équations (168), et il faudra que le

nouveau système se présente sous la forme

$$(169)\quad \begin{cases} \Phi_i\left(x, z_1, z'_1, \ldots, z_1^{(\mu_1)}, \ldots, z_k, z'_k, \ldots, z_k^{(\mu_k)}, \dfrac{dz_k^{(\mu_k)}}{dx}, \ldots, z_n, \ldots, z_n^{(\mu_n)}\right) = 0, \\ \dfrac{dz^{(\alpha-1)}}{dx} = z^{(\alpha)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Chaque équation Φ renfermera une dérivée, sinon on pourrait, sans intégration, faire disparaître, par des procédés de calcul ordinaire, l'une des variables de la question. Chacun des Φ renfermera une dérivée distincte, sans quoi on pourrait égaler les valeurs des dérivées égales tirées des deux équations $\Phi = 0$ différentes, et l'on aurait une relation $\Phi = 0$ sans dérivées.

Développons le calcul. Soit

$$(170)\qquad \Phi(x, z_1, z'_1, \ldots, z_1^{(\nu_1)}, \ldots, z_n, z'_n, \ldots, z_n^{(\nu_n)}) = 0$$

une équation sans dérivées. On tirerait de là l'une des inconnues $z_k^{(r)}$ et on pourrait l'éliminer entre cette équation (170) et $n-1$ des n premières équations du système (169), de sorte qu'on ait

$$(171)\qquad \psi_i(x, z_1, z'_1, \ldots, z_1^{(\mu_1)}, \ldots, z_k, z'_k, z_k^{(r-1)}, z_k^{(r+1)}, \ldots, z_k^{(\mu_k)}, z_n, \ldots, z_n^{(\mu_n)}) = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n-1).$$

En outre l'équation

$$\frac{dz_k^{(r-1)}}{dx} = z_k^{(r)}$$

pourrait être remplacée par l'équation

$$\psi\left(x, z_1, z'_1, \ldots, z_k^{(r-1)}, z_k^{(r+1)}, \ldots, z_n, z'_n, \ldots, \frac{dz_k^{(r-1)}}{dx}\right) = 0,$$

c'est-à-dire par l'équation (170) quand on y a remplacé $z_k^{(r)}$ par sa valeur tirée de l'équation ci-dessus.

Mais si l'on différentie l'équation (170), on a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{dz_1} z'_1 + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial z_k^{(r-1)}} z_k^{(r)} + \frac{\partial\Phi}{\partial z_k^{(r)}} z_k^{(r+1)} + \ldots = 0.$$

On peut encore éliminer $z_k^{(r)}$ au moyen de la relation $\dfrac{dz_k^{(r-1)}}{dx} = z_k^{(r)}$ et l'on aura

finalement le système

$$(172)\quad \begin{cases} \psi = 0, \\ \psi_i = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \dfrac{dz_1}{dx} = z'_1, \quad \ldots, & \dfrac{dz_1^{(\mu_1-2)}}{dx} = z_1^{(\mu_1-1)}, \\ \ldots\ldots, \quad \ldots, & \ldots\ldots, \\ \dfrac{dz_k}{dx} = z'_k, \quad \ldots, \quad \dfrac{dz_k^{(r-2)}}{dx} = z_k^{(r-1)}, \quad \dfrac{dz_k^{(r+1)}}{dx} = z_k^{(r+2)}, \quad \ldots, & \dfrac{dz_k^{(\mu_k-2)}}{dx} = z_k^{(\mu_k-1)}, \\ \ldots\ldots, \quad \ldots, \quad \ldots\ldots, \quad \ldots\ldots, \quad \ldots, & \ldots\ldots, \\ \dfrac{dz_n}{dx} = z'_n, \quad \ldots, & \dfrac{dz_n^{(\mu_n-2)}}{dx} = z_n^{(\mu_n-1)}, \end{cases}$$

qui renferme $\mu_1 + \ldots + (\mu_k - 1) + \ldots + \mu_n$ équations à autant d'inconnues.

Le système (172) est équivalent au système (169) puisque toutes les conditions fonctionnelles de ce dernier système sont satisfaites dans le système (172).

En continuant ainsi, on peut être ramené à un système complètement algébrique. Nous écarterons ce cas.

Donc, en général, tout système de n équations différentielles à n inconnues peut être ramené à un système de la forme dite *de Jacobi*.

$$(173)\qquad f_\lambda\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_\lambda}{dx}\right) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m).$$

126. En résolvant les équations (163) par rapport aux dérivées qu'elles renferment, on pourra mettre le système sous la forme

$$\frac{dy_\lambda}{dx} = \varphi_\lambda(x, y_1, \ldots, y_m) \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

Le calcul est particulièrement intéressant dans le cas où le système (173) est *algébrique,* c'est-à-dire lorsque les fonctions F sont algébriques, entières et rationnelles par rapport à toutes les lettres qu'elles renferment.

Mettons les équations (173) sous la forme

$$(174)\quad \begin{cases} Y_1^{\nu_1} + f_{11}(x, y_1, \ldots, y_m) Y_1^{\nu_1-1} + \ldots + f_{1\nu_1}(x, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_m^{\nu_m} + f_{m1}(x, y_1, \ldots, y_m) Y_m^{\nu_m-1} + \ldots + f_{m\nu_m}(x, y_1, \ldots, y_m) = 0, \end{cases}$$

où l'on a

$$\frac{dy_\lambda^h}{dx^h} = Y_\lambda^h.$$

Posons

$$(175)\qquad t = a_1 Y_1 + \ldots + a_m Y_m,$$

les quantités a étant des indéterminées et formons l'équation

$$(176)\qquad (t-t_1)\ldots(t-t_N)=0,$$

où $N=\nu_1\nu_2\ldots\nu_m$ représente le nombre des combinaisons des éléments des solutions des équations (174). L'équation (176) est rationnelle par rapport aux coefficients des équations (174), car son premier membre est une fonction symétrique des racines de ces équations. On peut donc calculer les coefficients de l'équation (176) et la mettre sous la forme

$$(177)\qquad R(t)=g_0(x,y_1,\ldots,y_m)t^N+\ldots+g_N(x,y_1,\ldots,y_m)=0,$$

où les g sont des fonctions entières des lettres qu'ils renferment.

Prenons maintenant d'autres constantes b et posons

$$(178)\qquad u=b_1Y_1+\ldots+b_mY_m,$$

ce qui donnera N fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_N$. Il est évident que, quel que soit ρ entier et positif, l'expression $t_1^\rho u_1+\ldots+t_N^\rho u_N$ sera une fonction symétrique des racines des équations (174) et s'exprimera rationnellement en $x, y_1, \ldots, y_m$. Posons alors

$$(179)\qquad \begin{cases} u_1 + \ldots + u_N = \omega_0(x,y_1,\ldots,y_m),\\ u_1t_1 + \ldots + u_Nt_N = \omega_1(x,y_1,\ldots,y_m),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ u_1t_1^{N-1}+\ldots+u_Nt_N^{N-1}=\omega_{N-1}(x,y_1,\ldots,y_m),\end{cases}$$

et multiplions ces équations par des facteurs indéterminés $\lambda_{N-1}, \lambda_{N-2}, \ldots, \lambda_1$ et g_3; nous aurons, après addition,

$$(180)\qquad U_1\Omega(t_1)+\ldots+u_N\Omega(t_N)=g_0\omega_{N-1}+\lambda_1\omega_{N-2}+\ldots+\lambda_{N-1}\omega_0,$$

à condition que Ω soit déterminé par la relation

$$g_0t^{N-1}+\lambda_1t^{N-2}+\ldots+\lambda_{N-1}=\Omega(t).$$

Déterminons maintenant les λ, de sorte que l'on ait

$$\Omega(t_1)=0,\quad \ldots,\quad \Omega(t_{\alpha-1})=0,\quad \Omega(t_{\alpha+1})=0,\quad \ldots,\quad \Omega(t_N)=0,$$

ou, ce qui revient au même, à condition que $\Omega(t)$ qui est du degré $N-1$ en t, et dont on connaît les racines, devienne $\frac{R(t)}{t-t_\alpha}$, c'est-à-dire

$$g_0t^{N-1}+(g_1+g_0t_\alpha)t^{N-2}+\ldots+(g_{N-1}+g_{N-2}t_\alpha+\ldots+g_0t_\alpha^{N-1}).$$

Alors, en tenant compte de l'équation de définition de $\Omega(t)$, nous aurons

$$(181)\quad \begin{cases} \lambda_1 = g_1 + g_0 t_\alpha, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_{N-1} = g_{N-1} + g_{N-2} t_\alpha + \dots + g_0 t_\alpha^{N-1}. \end{cases}$$

En outre, l'équation (180) deviendra

$$u_\alpha = \frac{g_0 \omega_{N-1} + \lambda_1 \omega_{N-2} + \dots + \lambda_{N-1} \omega_0}{\Omega(t_\alpha)}.$$

Puisque, d'une part, les λ, d'après les équations (181), sont des fonctions entières de t_α avec des coefficients entiers en $x, y_1, \dots, y_m$ et que, d'autre part, d'après l'équation $\frac{R(t)}{t - t_\alpha} = \Omega(t)$, on a

$$\Omega(t_\alpha) = R'(t_\alpha) = N g_0 t_\alpha^{N-1} + (N-1) g_1 t_\alpha^{N-2} + \dots + g_{N-1},$$

on voit que u_α prendra la forme

$$(182)\quad u_\alpha = \frac{S_1(x, y_1, \dots, y_m) t_\alpha^{N-1} + S_2(x, y_1, \dots, y_m) t_\alpha^{N-2} + \dots + S_N(x, y_1, \dots, y_m)}{R'(t_\alpha)},$$

où les S sont rationnels et où $R'(t_\alpha)$ ne dépend pas des constantes b renfermées dans u_α. En outre, à cause de l'indétermination des constantes a, on peut supposer que $R'(t_\alpha)$ n'est pas nul.

Si l'on supposait $R'(t_\alpha) = 0$ il y aurait deux racines égales dans l'équation (177) et, par suite, une relation algébrique entre $x, y_1, y_2, \dots, y_m$, ce que l'on ne suppose pas.

Soit $Y_{1\alpha}, \dots, Y_{m\alpha}$ la combinaison des solutions des équations (174) qui correspond à t_α et, avec des choix quelconques des constantes b, formons les m équations

$$(183)\quad \begin{cases} a_1 Y_{1\alpha} + \dots + a_m Y_{m\alpha} = t_\alpha, \\ b_{11} Y_{1\alpha} + \dots + b_{m1} Y_{m\alpha} = S_{11} t_\alpha^{N-1} + \dots + S_{N1} : R'(t_\alpha), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ b_{1,m-1} Y_{1\alpha} + \dots + b_{m,m-1} Y_{m\alpha} = S_{1,m-1} t_\alpha^{N-1} + \dots + S_{N,m-1} : R'(t_\alpha). \end{cases}$$

Nous pouvons construire les formules

$$Y_{\rho\alpha} = A_{1\rho} t_\alpha^{N-1} + \dots + A_{N\rho} : R'(t_\alpha).$$

où les A sont des fonctions rationnelles de $x, y_1, \dots, y_m$ et $R'(\alpha)$ une fonction entière de degré $N-1$ en t_α, avec des coefficients fonctions entières des mêmes lettres.

Donc, les branches $Y_{1\alpha}, \dots, Y_{m\alpha}$ des fonctions algébriques $Y_1, \dots, Y_m$ de x,

$y_1, \ldots, y_m$ sont formées de fonctions rationnelles d'une seule fonction algébrique t_α et de ces grandeurs $x, y_1, \ldots, y_m$.

Les coefficients s'expriment rationnellement au moyen de ces quantités, et à chaque combinaison de branches correspond une valeur de t, solution de l'équation (177) et réciproquement. De plus, la forme des expressions obtenues est indépendante de l'indice α de t.

127. Soit $g(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ le plus petit dénominateur commun des fonctions $A_{1\rho}, \ldots, A_{N\rho}$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m$), on aura

$$A_{\alpha\rho} = \frac{g_{\alpha\rho}(x, y_1, \ldots, y_m)}{g(x, y_1, \ldots, y_m)},$$

et $g_{\alpha\rho}$ et g seront des fonctions entières. On pourra donc écrire

$$Y_{\rho\alpha} = \frac{g_{1\rho} t_\alpha^{N-1} + g_{2\rho} t_\alpha^{N-2} + \ldots + g_{N\rho}}{g\, R'(t_\alpha)},$$

et, si l'on pose $g\, R(t) = G(x, t, y_1, \ldots, y_m)$, on aura, puisque g ne dépend pas de t,

$$Y_{\rho_\alpha} = \frac{G_\rho(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{\dfrac{\partial G(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{\partial t_\alpha}},$$

où G_ρ sera une fonction de $x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m$, du degré $N - 1$ en t_α. En revenant à la notation $Y = \frac{dy}{dx}$, nous aurons ce théorème :

Le système différentiel

$$f_\lambda\left(x, y_1, \ldots, y_m, \frac{dy_\lambda}{dx}\right) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

du degré ν_λ *en* $\frac{dy_\lambda}{dx}$, *peut être remplacé par les* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m = N$ *systèmes suivants, chacun équivalent au précédent*

$$(184) \qquad \frac{dy_\lambda}{dx} = \frac{G_\lambda(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{\dfrac{\partial G(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{\partial t_\alpha}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N).$$

où $G_1, G_2, \ldots, G_m$ *sont des fonctions entières et où* t_α *représente successivement chacune des* N *solutions de l'équation du* N[ième] *degré*

$$G(x, t, y_1, \ldots, y_m) = 0.$$

Les fonctions $G_1, \ldots, G_m$ *sont du degré* $N - 1$ *en* t_α. La forme (184) est dite *de Jacobi* ou *de M. Weierstrass.*

128. On peut décomposer G en facteurs irréductibles en t. Supposons que t_α annule le facteur $g(x, t, y, \ldots, y_m)$, on aura

$$G = g \times h(x, t, y_1, \ldots, y_m),$$

et h ne sera pas nul pour $t = t_\alpha$. On aura, par suite,

$$\frac{\partial G}{\partial t} = h \frac{\partial g}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial t},$$

et pour $t = t_\alpha$

$$\frac{\partial G}{\partial t_\alpha} = h \frac{\partial g}{\partial t_\alpha}.$$

On en déduira la formule

$$Y_{\rho\alpha} = \frac{G_\rho(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{h(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)} \times \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial t_\alpha}}.$$

Soit n le degré en t de l'équation $g = 0$ et soient $t_\alpha, t_\beta, \ldots, t_\mu$ ses solutions, on aura

$$\frac{G_\rho(t_\alpha)}{h(t_\alpha)} = \frac{G_\rho(t_\alpha) \times h(t_\beta) \times \ldots \times h(t_\mu)}{h(t_\alpha) \times h(t_\beta) \times \ldots \times h(t_\mu)}$$

et le dénominateur sera une fonction entière symétrique des racines. Il s'exprimera rationnellement en $x, y_1, \ldots, y_m$. Le numérateur renfermera une fonction entière symétrique des racines de l'équation et $\frac{g}{t - t_\alpha}$ s'exprimera rationnellement en $x, y_1, \ldots, y_m$. Le numérateur pourra même, au moyen de l'équation $g = 0$, être abaissé au degré $n - 1$ en t_α. On aura donc la formule

$$Y_{\rho\alpha} = \frac{g_\rho(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{\frac{\partial g}{\partial t_\alpha}}.$$

D'où, comme conclusion générale, le théorème suivant :

Décomposons le polynome R(t) *en facteurs irréductibles* $g_1, g_2, \ldots, g_\sigma$. *Le système différentiel proposé pourra être remplacé par les systèmes équivalents suivants, au nombre de* $N = \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$

$$(185) \qquad \frac{dy_\lambda}{dx} = \frac{g_{k\lambda}(x, t_{k\rho}, y_1, \ldots, y_m)}{\frac{\partial g_k}{\partial t_{k\rho}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \sigma),$$

où $g_k, g_{k1}, \ldots, g_{km}$ *sont des fonctions entières de leurs lettres et où* $t_{k\rho}$ *est successivement remplacé par chacune des racines de chacune des équations irréductibles* $g_k = 0$.

Il est important de remarquer que la réduction pratique du système (174) au système (184) est toujours possible, mais que le passage au système (185) n'est pas toujours praticable, à cause de la décomposition effective du polynome $R(t)$ en ses facteurs irréductibles. On a donc seulement démontré l'équivalence des systèmes (174) et (185). Nous ajouterons que, dans une équation irréductible telle que $g_k = 0$, on peut passer d'une solution t à toutes les autres, d'une manière continue en faisant décrire certains chemins fermés aux variables x et y. Donc les systèmes (185), qui correspondent aux diverses solutions d'une même équation $g_k = 0$, peuvent être représentés par un seul d'entre eux et, par suite :

Le système (174) *peut être représenté par les* σ *systèmes différentiels*

$$\frac{dy_\lambda}{dx} = \frac{g_{k\lambda}(x, t_\lambda, y_1, \ldots, y_m)}{\frac{\partial g_k}{\partial t_\lambda}}, \tag{186}$$

où t_λ *est une quelconque des solutions des* σ *équations algébriques*

$$g_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

La théorie que nous venons de faire est générale. Le cas particulier qui nous intéresse est celui où les équations finales (184) ou (186) ont leurs seconds membres fonctions linéaires et homogènes de $y_1, y_2, \ldots, y_m$. L'étude de ces équations a été faite, dans tous les Chapitres précédents, sous la forme (A) du Chapitre I.

129. Puisque nous avons donné la théorie de la réduction à la forme canonique des *systèmes algébriques,* il ne nous semble pas inutile d'y joindre les premiers principes de l'*irréductibilité de ces systèmes.*

Soient

$$\frac{\partial G(x, t_1, y_1, \ldots, y_m)}{\partial t_1} \frac{dy_\lambda}{dx} = G_\lambda(x, t_1, \ldots, y_m) \tag{184'}$$

les équations d'un système algébrique où t_1 est une racine choisie de l'équation $G = 0$.

Supposons qu'il existe une solution $\eta_1, \ldots, \eta_m$ dont ν des éléments satisfassent à une relation algébrique telle que

$$f(x, \eta_1, \ldots, \eta_\nu) = 0. \tag{187}$$

Si, dans les équations (184), et avec les conditions $G = 0$ et

$$f(x, y_1, \ldots, y_\nu) = 0, \tag{188}$$

on élimine y_ν, par exemple, on obtiendra un système différentiel à $m - 1$ équa-

tions qu'on pourra supposer ramené à la forme canonique

$$(189)\quad \frac{\partial g(x, u_1, y_1, \ldots, y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \ldots, y_m)}{\partial u_1}\frac{dy_\lambda}{dx}$$
$$= g_\lambda(x, y_1, \ldots, y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \ldots, y_m) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, m),$$

et où u_1 est une solution de l'équation $g(x, u, y_1, \ldots, y_m) = 0$, et $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\nu-1}, \eta_{\nu+1}, \ldots, \eta_m$ formera une solution de ce système (189).

Réciproquement, si une partie des éléments d'une solution $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ de (184), soit $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$, forme une solution complète d'un système à ν équations différentielles

$$(190)\quad \frac{\partial h(x, v_1, y_1, \ldots, y_\nu)}{\partial v_1}\frac{dy_\mu}{dx} = h_\mu(x, v_1, y_1, \ldots, y_\nu) \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, \nu),$$

où v_1 satisfait à l'équation $h(x, v_1, y_1, \ldots, y_\nu) = 0$, appelons $\overline{t}_1$ et $\overline{v}_1$ les valeurs de t_1 et v_1 qui correspondent à la solution $\eta_1, \ldots, \eta_m$, on tirera des équations (184) et (190) les relations

$$(191)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G(x, \overline{t}_1, \eta_1, \ldots, \eta_m)}{\partial \overline{t}_1} h_\lambda(x, \overline{v}_1, \eta_1, \ldots, \eta_\nu) = \dfrac{\partial h(x, \overline{v}_1, \eta_1, \ldots, \eta_\nu)}{\partial \overline{v}_1} G_\lambda(x, \overline{t}_1, \eta_1, \ldots, \eta_m) \\ \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, \nu). \end{cases}$$

Il y aura donc des relations algébriques entre les éléments de la solution $\eta_1, \ldots, \eta_m$, à la condition que les équations (191) ne soient pas toutes identiques, c'est-à-dire que les ν premières équations du système (184) ne renferment que $y_1, \ldots, y_\nu$; alors elles formeraient elles-mêmes un système différentiel à ν équations. Écartons ce dernier cas, et éliminons de l'une des équations (174), de l'équation $G = 0$ et de l'une des relations

$$\frac{\partial G(x, t_1, y_1, \ldots, y_m)}{\partial t_1} h_\alpha(x, v_1, y_1, \ldots, y_m) = \frac{\partial h}{\partial v_1} G_\alpha,$$

la quantité y_m; nous aurons un système différentiel à $m-1$ équations, admettant la solution $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m-1}$ et dont la partie $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$ forme encore une solution de (190). Opérons sur ce système à $m-1$ équations comme on a fait pour le système précédent, nous obtiendrons un système à $m-2$ équations, etc. et, finalement, nous aurons un système de ν équations de la forme

$$(192)\quad \frac{\partial H(x, T_1, y_1, \ldots, y_\nu)}{\partial T_1}\frac{dy_\lambda}{dx} = H_\lambda(x, T_1, y_1, \ldots, y_\nu) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où T_1 satisfait à la relation

$$(193)\quad H(x, T_1, y_1, \ldots, y_\nu) = 0.$$

Ce système admettant la solution $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$, commune avec le système (180), on tirera de (193) et (190)

$$\text{(194)} \qquad \frac{\partial \mathrm{H}(x, \overline{\mathrm{T}}_1, \eta_1, \ldots, \eta_\nu)}{\partial \overline{\mathrm{T}}_1} h_\alpha(x, \overline{v}_1, \eta_1, \ldots, \eta_\nu) = \frac{\partial h}{\partial \overline{v}_1} \mathrm{H}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où $\overline{\mathrm{T}}_1$ satisfait à la relation

$$\text{(195)} \qquad \mathrm{H}(x, \overline{\mathrm{T}}_1, \eta_1, \ldots, \eta_\nu) = 0.$$

Si les équations (195) n'étaient pas identiques en $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$, on pourrait encore diminuer d'une unité le nombre des équations du système (192), et alors une partie $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$ de la solution $\eta_1, \ldots, \eta_m$ du système (190) serait une solution d'un système à moins de ν équations; *mais nous supposerons qu'aucune partie de la solution $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$ de* (190) *ne forme une solution d'un système algébrique à moins de ν équations.* En conséquence, les équations (195) seront identiques, et, par suite, toutes les solutions de (190) formeront des parties des solutions de (184), et il est évident que l'identité des équations (195) subsiste quand, au lieu de $\overline{v}_1$, on y introduit une branche quelconque de la fonction implicite v_1 définie par l'équation $h(x, v_1, y_1, \ldots, y_m) = 0$, et que $\eta_1, \ldots, \eta_m$ est remplacé par $y_1, \ldots, y_m$. Il faudra supposer que $\overline{v}_1$ a suivi un chemin convenable pour arriver à l'une quelconque de ses branches.

De là une définition de l'irréductibilité.

Le système algébrique et différentiel de m équations est dit irréductible, *quand aucune combinaison de moins de m éléments de chacune de ses solutions ne forme une solution d'un système différentiel de moins de m équations. En d'autres termes, le système proposé ne fournit aucune solution à un système quelconque de moins de m équations, algébrique et de même forme.*

130. Revenons aux équations (184) du n° **127**, et appelons *degré du système* le degré en t de l'équation algébrique

$$\mathrm{G}(x, t, y_1, \ldots, y_m) = 0.$$

Nous allons montrer qu'un système irréductible de m équations et de degré n ne peut avoir aucune solution commune avec un système de m équations, mais de degré inférieur à n.

Mettons, en effet, ce deuxième système sous la forme canonique

$$\text{(196)} \qquad \frac{\partial g(x, \theta, y_1, \ldots, y_m)}{\partial \theta} \frac{dy_\lambda}{dx} = g_\lambda(x, \theta, y_1, \ldots, y_m)$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

où θ est une racine de l'équation irréductible de degré $\nu < n$,

$$(197) \qquad g(x, \theta, y_1, \ldots, y_m) = 0,$$

et supposons que le système (174) et les équations (196) et (197) déterminent une solution commune $\eta_1, \ldots, \eta_m$. On aurait

$$(198) \qquad \frac{G_\alpha(x, T_1, \eta_1, \ldots, \eta_m)}{\frac{\partial G(x, T_1, \eta_1, \ldots, \eta_m)}{\partial T_1}} = \frac{g_\alpha(x, \Theta_1, \eta_1, \ldots, \eta_m)}{\frac{\partial g(x, \Theta_1, \eta_1, \ldots, \eta_m)}{\partial \Theta_1}} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

où T_1 et Θ_1 représentent les valeurs de t_1 et θ_1 qui correspondent à la solution $\eta_1, \ldots, \eta_m$. D'après ce qui précède, puisqu'il ne peut y avoir de relation algébrique entre les éléments d'une solution d'un système irréductible, l'équation (188) ou encore l'équation

$$\frac{G_\alpha(x, t_1, y_1, \ldots, y_m)}{\frac{\partial G(x, t_1, y_1, \ldots, y_m)}{\partial t_1}} = \frac{g_\alpha(x, \theta_1, y_1, \ldots, y_m)}{\frac{\partial g(x, \theta_1, y_1, \ldots, y_m)}{\partial \theta_1}}$$

doit être identique en $y_1, \ldots, y_m$, et alors les deux systèmes d'équations (184) et (196) se confondent, puisque toutes les solutions leur sont communes.

Mettons l'équation (197) sous la forme

$$(199) \qquad \theta_1^\nu + \omega_1(x, y_1, \ldots, y_m)\theta_1^{\nu-1} + \ldots + \omega_\nu(x, y_1, \ldots, y_m) = 0,$$

où les ω sont des fonctions rationnelles, et remarquons que la réduction d'un système différentiel à la forme canonique peut toujours être conduite de sorte que t_1, qui est une fonction rationnelle de $x, y_1, \ldots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}$, soit encore, au moyen des équations (186) et (199), rendue fonction entière de θ_1 au degré $n - 1$, et à coefficients rationnels en $x, y_1, \ldots, y_m$. Alors on pourra poser

$$(200) \quad t_1 = \Omega_0(x, y_1, \ldots, y_m) + \Omega_1(x, y_1, \ldots, y_m)\theta_1 + \ldots + \Omega_{\nu-1}(x, y_1, \ldots, y_m)\theta_1^{\nu-1}.$$

Alors, à cause de (189), ou encore en éliminant θ_1, on aura une équation du degré ν en t_1, et les coefficients seront rationnels en $x, y_1, \ldots, y_m$. Mais l'équation $G = 0$ étant irréductible, il est impossible de supposer que l'équation (187) définissant θ_1 soit d'un degré inférieur.

Comme corollaire, l'équation $G = 0$, irréductible en $t_1, x, y_1, \ldots, y_m$, est encore irréductible en $t_1, \eta_1, \ldots, \eta_m$. Car, s'il en était autrement, le système différentiel initial aurait une solution commune avec un système de degré moindre.

Enfin, il résulte de ce qui précède que, si l'on considère un système irréductible qui a une solution commune avec un système du même nombre d'équations ou d'un nombre plus grand, toutes ses solutions forment chacune toute une solution ou une partie d'une solution du second système.

131. La théorie générale d'intégration que nous avons exposée dans les Chapitres précédents n'ôte rien à l'importance de procédés particuliers d'intégration qui fournissent d'ailleurs de remarquables théorèmes.

Nous donnerons, pour terminer ce travail, quelques exemples de ces théories particulières.

Nous avons appelé *solution* du système

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

un ensemble de fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfaisant à ces équations. Nous appellerons, *par opposition, intégrale* du système (A) toute relation

$$(201) \qquad f(x, y_1, \ldots, y_n) = \text{const.},$$

qui est identiquement satisfaite en vertu des équations (A), c'est-à-dire par une solution arbitraire de ces équations.

Si l'on connaît un système fondamental de solutions y_{ij}, la solution générale des équations (A) est de la forme

$$(202) \qquad y_i = C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in},$$

et l'on peut résoudre ces équations par rapport aux constantes arbitraires. On obtiendra ainsi n intégrales linéaires distinctes

$$(203) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}y_1 + \ldots + \alpha_{1n}y_n = C_1, \\ \alpha_{n1}y_1 + \ldots + \alpha_{nn}y_n = C_n, \end{cases}$$

où les α sont des fonctions connues des solutions données y_{ij}.

Réciproquement, si l'on connaît n intégrales distinctes, on obtiendra, en résolvant les équations (203), des équations de la forme

$$(204) \qquad y_i = C_1 A_{i1} + \ldots + C_n A_{in},$$

et, puisque les constantes sont indéterminées, on peut faire, par exemple, $C_2 = 0, \ldots, C_n = 0$, et l'on voit que A_{i1} sera une solution du système (A). On pourra donc mettre les équations (204) sous la forme (202).

Posé au point de vue de la recherche des *intégrales,* le problème de l'intégration du système (A) est donc différent de la théorie générale que nous avons ex-

posée. On comprend qu'il y ait une importance considérable à rechercher les formes les plus simples des intégrales.

Supposons, par exemple, avec M. Darboux, que les coefficients a des équations (A) soient *des fonctions rationnelles de x*. Il pourra exister des intégrales non linéaires, algébriques et rationnelles, tandis que les intégrales linéaires peuvent être irrationnelles ou même transcendantes. Il y a donc intérêt à chercher ces intégrales de degré supérieur. Nous allons montrer comment M. Darboux parvient à résoudre ce problème, et en même temps indiquer les beaux théorèmes qui se rattachent à la question.

Prenons d'abord un exemple. L'équation

$$2a\frac{d^2y}{dx^2}+a'\frac{dy}{dx}-2y=0,$$

où a' est la dérivée de a, admet les deux intégrales premières linéaires

$$e^{-\int\frac{dx}{\sqrt{a}}}\left(y+\sqrt{a}\,\frac{dy}{dx}\right)=C_1,$$

$$e^{+\int\frac{dx}{\sqrt{a}}}\left(y-\sqrt{a}\,\frac{dy}{dx}\right)=C_2,$$

et elles peuvent être irrationnelles ou transcendantes, tandis que l'intégrale du second degré

$$y^2-a\frac{dy^2}{dx^2}=C_1C_2$$

est algébrique et rationnelle quand a est rationnel.

Considérons une intégrale rationnelle de degré quelconque

$$f(x, y_1, \ldots, y_n)=C, \tag{205}$$

elle doit satisfaire identiquement à l'équation aux dérivées partielles

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y_1}(a_{11}y_1+\ldots+a_{1n}y_n)+\ldots+\frac{\partial f}{\partial y_n}(a_{n1}y_1+\ldots+a_{nn}y_n). \tag{206}$$

On voit ainsi que, si la fonction f n'est pas homogène, en la décomposant en parties homogènes en $y_1, \ldots, y_n$, chaque partie égalée séparément à une constante donnera une intégrale du système (A). En effet, soit

$$f=f_1+f_2+\ldots+f_k,$$

on aura identiquement

$$\sum\frac{\partial f_i}{\partial x}+\sum\frac{\partial f_i}{\partial y_1}(a_{11}y_1+\ldots+a_{1n}y_n)\ldots+\sum\frac{\partial f_i}{\partial y_n}(a_{n1}y_1+\ldots+a_{nn}y_n)=0 \tag{207}$$

$$(i=1, 2, \ldots, k).$$

Changeons y en λy, et nous aurons

$$(208)\quad \begin{cases} f_i(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n) = \lambda^{\mu_i} f_i(y_1, \ldots, y_n), \\ \dfrac{\partial f_i(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n)}{\partial x} = \lambda^{\mu_i} \dfrac{\partial f_i(y_1, \ldots, y_n)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial f_i(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n)}{\partial (\lambda y)} = \lambda^{\mu_i - 1} \dfrac{\partial f_i(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y}, \end{cases}$$

et aussi

$$(209)\quad \sum \lambda^{\mu_i} \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum \lambda^{\mu_i} \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(a_{11} y_1 + \ldots + a_{n1} y_n) + \ldots + \sum \lambda^{\mu_i} \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(\ldots) = 0,$$

et, λ étant absolument arbitraire, il faut que l'on ait séparément

$$(210)\quad \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(a_{11} y_1 + \ldots + a_{n1} y_n) + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(a_{n1} y_1 + \ldots + a_{nn} y_n) = 0.$$

Nous pourrons donc supposer que, dans l'équation (205), f est homogène en $y_1, \ldots, y_n$.

Cela posé, soit y_{ij} un système fondamental de solutions et soit

$$(211)\quad y_i = C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in}$$

la solution générale.

On peut supposer ces valeurs y_i portées dans $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ et f devra rester constant après la substitution (211).

Tout covariant F de f, multiplié par une puissance convenable (négative) du déterminant de la substitution (211), se transforme dans le covariant analogue formé avec la fonction $\varphi(C_1, C_2, \ldots, C_n)$, où $\varphi(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est la fonction *indépendante de* x qui résulte de la substitution (211) faite dans $f(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Mais ce nouveau covariant étant exprimé au moyen des constantes $C_1, \ldots, C_n$ prises comme nouvelles variables, est indépendant de x, c'est-à-dire est une constante par rapport à x. *Donc enfin tout covariant de l'intégrale f, multiplié par une puissance convenable d'une fonction connue de x, est également une intégrale.*

La proposition s'étend au cas où l'on a plusieurs intégrales, et où l'on considère un covariant quelconque du système de ces formes.

En effet, soient

$$\begin{gathered} f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_k(x, y_1, \ldots, y_n) \end{gathered}$$

k formes intégrales homogènes qui deviennent par la substitution (201) $\varphi_i(C_1, \ldots, C_n)$, c'est-à-dire des constantes.

Remplaçons les variables $y_1, \ldots, y_n$ par les variables $C_1, \ldots, C_n$ au moyen

de la substitution (211). Nous aurons d'abord

$$f_i(x, C_1 y_{11} + \ldots + C_n y_{1n}, \ldots) = \varphi_i(C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Ensuite le covariant F de $f_1, f_2, \ldots, f_k$ est une expression $F(f_1, \ldots, f_k)$ qui se reproduit après la substitution (201), mais multipliée par une puissance δ^n du déterminant de la substitution.

On aura donc, par suite du changement de variables (211),

$$F(f_1, \ldots, f_k) = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\delta^n.$$

Or δ ne dépend que de x. On voit donc, en revenant aux anciennes variables, que

$$F(f_1, \ldots, f_k) \times \delta^{-n}$$

est une constante, c'est-à-dire une intégrale.

Ce beau théorème s'applique, avec des modifications convenables, aux contre-variants de $f(x, y_1, \ldots, y_n)$, comme nous allons le montrer.

Introduisons pour cela le système auxiliaire

$$(212) \qquad \frac{dz_i}{dx} = -a_{1i}z_1 - a_{2i}z_2 - \ldots - a_{ni}z_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le système (212) est dit *réciproque du système* (A). Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et $z_1, \ldots, z_n$ deux solutions quelconques appartenant respectivement au système (A) et à son réciproque (212), on aura

$$y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_n z_n = \text{const.}$$

En effet, en dérivant, on trouve

$$z_1 \frac{dy_1}{dx} + \ldots + z_n \frac{dy_n}{dx} + y_1 \frac{dz_1}{dx} + \ldots + y_n \frac{dz_n}{dx} = 0,$$

et, si l'on remplace les dérivées par leurs valeurs tirées de (A) et (212), on trouve une identité.

Il résulte de là que, pour intégrer le système (A), on n'augmente pas la difficulté en considérant l'ensemble des systèmes (A) et (212). On aura, en effet, à résoudre en plus un système algébrique de la forme

$$y_{1i}z_1 + \ldots + y_{ni}z_n = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour connaître la solution générale de (212) quand on aura déjà un système fondamental de solutions de (A).

Or, si l'on pose

$$H = \sum \sum a_{ik} z_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

l'ensemble des systèmes (A) et (202) revient à écrire le *système canonique, dans le sens classique du mot,*

$$(213) \qquad \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial z_i}, \qquad \frac{dz_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

Alors, soient

$$f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n \mid z_1, z_2, \ldots, z_n) = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

k intégrales homogènes en $y_1, \ldots, y_n$ et en $z_1, \ldots, z_n$.

Toute forme invariante de ce système d'intégrales, multipliée par une fonction connue de x, est encore une intégrale du système canonique.

En effet, la solution générale de (A) est

$$(214) \qquad y_i = C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in},$$

et les intégrales de (203) sont

$$(215) \qquad y_{1i} z_1 + \ldots + y_{ni} z_n = \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

car les équations (204) et (205) donnent

$$y_1 z_1 + \ldots + y_n z_n = C_1 \gamma_1 + \ldots + C_n \gamma_n = \text{const.}$$

Alors, si dans les intégrales on remplace $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$ par leurs valeurs tirées de (204) et (215), elles doivent se transformer en des fonctions

$$\varphi_i[C_1, \ldots, C_n \mid \gamma_1, \ldots, \gamma_n] \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

indépendantes de x. Mais (214) et (215) sont des substitutions linéaires qui changent les variables y et z dans les variables C et γ. Donc toute forme invariante du système des intégrales f se réduira, quand on la multipliera par une puissance convenable du déterminant de la substitution (214), à la fonction analytique formée avec les fonctions φ_i, c'est-à-dire à une fonction des constantes C et γ. Or, une telle fonction est encore une intégrale.

Le déterminant de la substitution est égal, comme on l'a vu au Chapitre I, à $e^{-\int \Sigma a_{ii} dx}$. Enfin, remarquons que le dernier théorème démontré comprend la fameuse proposition de Poisson dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

132. Donnons enfin, d'après M. Appell, les principes essentiels de la théorie des

fonctions invariantes des intégrales des systèmes quelconques de la forme (A)

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n.$$

M. Appell donne, dans un sens très général, le nom de *fonction invariante* de np quantités X_{ik} à chaque fonction algébrique entière des variables qui se reproduit multipliée par une puissance de la substitution quand on fait sur les variables une substitution linéaire telle que

$$X_{ik} = C_{i1}Y_{1k} + \ldots + C_{in}Y_{nk}.$$

Une pareille fonction peut être représentée par le Tableau

$$\begin{Bmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{1n} & \ldots & X_{np} \end{Bmatrix}$$

ou par la notation $I \begin{vmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{n1} & \ldots & X_{np} \end{vmatrix}$,

ou par la notation simplifiée $I(X_{ik})_{np}$.

M. Appell démontre les théorèmes généraux suivants :

I. Si l'on a l'identité

$$I(X_{ik})_{np} = D^m I(Y_{ik})_{np},$$

D étant le déterminant de la substitution ; la fonction invariante est homogène et de degré m par rapport aux variables d'une même ligne.

II. On a identiquement

$$I(X_{ik})_{np} = 0 \quad \text{si} \quad p < n.$$

III. Si $p = n$, une fonction invariante est, à un facteur près indépendant des variables X, une puissance du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{n1} & \ldots & X_{nn} \end{vmatrix}.$$

IV. Toute fonction invariante est une fonction entière et homogène de degré n des $n(p-n)+1$ déterminants Δ, Δ_{ip}, $\Delta_{i,n+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ où l'on a posé d'une manière générale (en supposant $p > n$)

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1,i-1} & X_{1k} & X_{1,i+1} & \ldots & X_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{n1} & \ldots & X_{n,i-1} & X_{nk} & X_{n,i+1} & \ldots & X_{nn} \end{vmatrix}.$$

On pourrait appliquer ces théorèmes à l'étude des systèmes différentiels (A). Mais, comme le fait M. Appell lui-même, on peut faire de ces systèmes une étude directe et d'ailleurs très simple; nous allons le faire voir.

Toute fonction algébrique entière F *des éléments des solutions d'un système fondamental* y_{ik} *des équations* (A)

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n$$

et des dérivées de ces éléments, qui se reproduit multipliée par un facteur constant différent de zéro quand on remplace le système fondamental de solutions par un autre système fondamental, est égale à une fonction algébrique entière des coefficients a et de leurs dérivées multipliée par une puissance de l'expression $e^{\int(a_{11}+\ldots+a_{nn})dx}$.

D'abord F doit se reproduire à un facteur constant près quand on permute entre elles les solutions y_{ik}. En effet, on peut remplacer les deux solutions y_{i1} et y_{i2} par les deux solutions $a_1 y_{i1} + b_1 y_{i2}$ et $a_2 y_{i1} + b_2 y_{i2}$, pourvu que le déterminant $a_1 b_2 - b_1 a_2$ soit différent de zéro. On prendra $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, $a_2 = 1$, $b_1 = 1$ et l'on aura permuté les deux solutions y_{i1} et y_{i2}. Alors, les deux fonctions entières $F(y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in})$, $F(y_{i2}, y_{i1}, \ldots, y_{in})$ ne différant que par un facteur constant, il faut qu'on trouve dans chacune la solution y_{i1} avec les dérivées de ses éléments jusqu'à un même ordre de dérivation.

Donc, F *contient les dérivées des éléments des solutions* y_{ik} *jusqu'à un ordre de dérivation indépendant de l'indice* k.

F est une *fonction invariante* des quantités formant le Tableau

$$\begin{array}{ccc}
y_{11}, & \ldots, & y_{1n}, \\
\dfrac{dy_{11}}{dx}, & \ldots, & \dfrac{dy_{1n}}{dx}, \\
\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
\dfrac{d^p y_{11}}{dx^p}, & \ldots, & \dfrac{d^p y_{1n}}{dx^p}, \\
\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
y_{n1}, & \ldots, & y_{nn}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\dfrac{d^p y_{n1}}{dx^p}, & \ldots, & \dfrac{d^p y_{nn}}{dx^p},
\end{array}$$

et au nombre de $n^2(p+1)$. En effet, supposons qu'on passe du système fonda-

mental de solutions y_{ik} à un autre système fondamental quelconque

$$Y_{ik} = C_{1i}y_{i1} + \ldots + C_{ni}y_{in}.$$

Il faudra que l'on ait identiquement

$$F\left(y_{11}, \ldots, y_{1n}, \ldots, \frac{d^p y_{1n}}{dx^p}, \ldots, \frac{d^p y_{nn}}{dx^p}\right) = H\,F\left(Y_{11}, \ldots, Y_{1n}, \ldots, \frac{d^p Y_{1n}}{dx^p}, \ldots, \frac{d^p Y_{nn}}{dx^p}\right),$$

H étant une fonction des seuls coefficients C de la substitution. D'ailleurs ce facteur H est différent de zéro tant que le nouveau système Y_{ik} est fondamental, c'est-à-dire tant que le déterminant des constantes C est différent de zéro. Donc H ne peut différer que par un facteur numérique k d'une puissance de D et l'on a

$$H = k\,D^m.$$

On peut supposer $Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n$ pour calculer k, et le calcul donne immédiatement $k = 1$.

La fonction F se reproduit donc multipliée par D^m quand on fait sur les variables y_{ik} la substitution indiquée. Donc F est une fonction invariante des $n^2(p+1)$ quantités du Tableau ci-dessus. Or, en vertu des équations proposées (A) et des équations dérivées qui ont même forme que les équations (A) elles-mêmes, on peut éliminer dans F *toutes les dérivées*, et alors F étant une fonction algébrique des seuls éléments du déterminant

$$D = |y_{ik}|,$$

et ne s'annulant qu'avec lui, est précisément une puissance de ce déterminant, multipliée par un facteur qui ne peut être que zéro ou une fonction algébrique entière des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées. Ce résultat est conforme aux théorèmes généraux.

Pour les systèmes de la forme (A), le nombre des applications semble restreint. Mais, pour le cas particulier d'une équation linéaire d'ordre n, on peut tirer de là les théories de l'élimination et de la transformation des équations différentielles, comme en Algèbre pour les équations de degré n. Nous renverrons pour ces questions au Mémoire de M. Appell.

NOTE SUR LES DÉTERMINANTS.

133. Considérons un déterminant quelconque P dont les éléments sont représentés par la notation a_{rs}. Nous aurons les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{1s}\dfrac{\partial P}{\partial a_{1s}}+\ldots+a_{ns}\dfrac{\partial P}{\partial a_{ns}}=P,\\ a_{r1}\dfrac{\partial P}{\partial a_{r1}}+\ldots+a_{rn}\dfrac{\partial P}{\partial a_{rn}}=P,\end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{1r}\dfrac{\partial P}{\partial a_{1s}}+\ldots+a_{nr}\dfrac{\partial P}{\partial a_{ns}}=0,\\ a_{r1}\dfrac{\partial P}{\partial a_{s1}}+\ldots+a_{rn}\dfrac{\partial P}{\partial a_{sn}}=0,\end{cases}$$

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}\,\partial a_{r's}}=0,\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}\,\partial a_{rs'}}=0,$$

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}\,\partial a_{r's'}}=-\frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs'}\,\partial a_{r's}}.$$

Le déterminant $\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}\,\partial a_{r's'}}$ de l'ordre $n-2$ se déduit, au signe près, du déterminant P en effaçant dans ce dernier deux lignes, la $r^{\text{ième}}$ et la $r'^{\text{ième}}$ et deux colonnes, la $s^{\text{ième}}$ et la $s'^{\text{ième}}$. Mais on peut aussi considérer les expressions $\dfrac{\partial P}{\partial a_{rs}}$ comme des déterminants principaux, et l'on obtient les formules suivantes, analogues aux formules (1),

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{s1}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{r1}\,\partial a_{s1}}+\ldots+a_{sn}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{r1}\,\partial a_{sn}}=\dfrac{\partial P}{\partial a_{r1}},\\ a_{s1}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{r2}\,\partial a_{s1}}+\ldots+a_{sn}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{r2}\,\partial a_{sn}}=\dfrac{\partial P}{\partial a_{r2}},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_{s1}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{rn}\,\partial a_{s1}}+\ldots+a_{sn}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{rn}\,\partial a_{sn}}=\dfrac{\partial P}{\partial a_{rn}}.\end{cases}$$

Portons ces valeurs dans la seconde relation (1) et tenons compte des équations (3) et (4), nous aurons

$$(6)\qquad P=\begin{vmatrix} a_{r1} & a_{s1}\\ a_{r2} & a_{s2}\end{vmatrix}\frac{\partial^2 P}{\partial a_{r1}\,\partial a_{s2}}+\ldots+\begin{vmatrix} a_{r,n-1} & a_{s,n-1}\\ a_{rn} & a_{sn}\end{vmatrix}\frac{\partial^2 P}{\partial a_{r,n-1}\,\partial a_{sn}},$$

ou encore

$$(7) \qquad \mathrm{P} = \sum_u \sum_v \begin{vmatrix} a_{ru} & a_{su} \\ a_{rv} & a_{sv} \end{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial a_{ru}\, \partial a_{sv}}.$$

L'équation (7) correspond à la règle de Laplace quand on développe le déterminant P par rapport aux éléments de deux colonnes à la fois.

134. Il est facile de démontrer cette règle en général. On peut d'abord faire des calculs analogues aux précédents, mais on peut aussi faire une démonstration générale comme nous allons l'indiquer.

Rappelons d'abord que, pour former les permutations des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ donnés, on peut considérer d'abord p désignées de ces lettres $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ par exemple, et permuter d'abord ces lettres. Puis, considérant les $n-p$ autres lettres, on les permutera. On obtiendra ainsi $\varpi_p \varpi_{n-p}$ permutations, ϖ_k étant en général le nombre des permutations de k lettres. En appelant C_n^p le nombre des combinaisons de n objets p à p, on aura C_n^p manières de faire l'opération précédente; on aura donc

$$\varpi_n = \mathrm{C}_n^p \varpi_p \varpi_{n-p},$$

parce que toutes les permutations de n lettres ont été comptées ainsi chacune une fois et une fois seulement comme il est facile de s'en assurer.

Toutes les permutations *d'un même groupe* sont caractérisées par ce fait que les p premières lettres sont les mêmes.

Cela posé, considérons un déterminant dont un terme quelconque ait la forme

$$\varepsilon a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant une permutation des seconds indices, et ε donnant le signe correspondant à cette permutation. Dans tous les termes, on peut supposer que *les p premiers seconds indices* sont toujours $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ *rangés dans un ordre quelconque*. Donc, pour obtenir tous les termes, on pourra les déduire de la permutation

$$\alpha_1 \ldots \alpha_p, \qquad \alpha_{p+1} \ldots \alpha_n,$$

en permutant d'abord les premiers indices, puis les $n-p$ derniers. On obtiendra ainsi successivement les termes

$$\varepsilon a_{p+1,\alpha_{p+1}} \ldots a_{n,\alpha_n} \left[\sum \pm a_{1\alpha_1} \ldots a_{p,\alpha_p} \right],$$

ou

$$\varepsilon \left[\sum a_{1\alpha_1} \ldots a_{p\alpha_p} \right] a_{p+1,\alpha p+1} \ldots a_{n,\alpha_n},$$

et ensuite les termes

$$\varepsilon\left[\sum a_{1\alpha_1}\ldots a_{p,\alpha_p}\right]\left[\sum a_{p+1,\alpha_{p+1}}\ldots a_{n\alpha_n}\right],$$

le signe ε résultant toujours de la permutation $\alpha_1\ldots\alpha_p \mid \alpha_{p+1}\ldots\alpha_n$, considérée comme résultant maintenant des deux permutations $\alpha_1\ldots\alpha_p$ et $\alpha_{p+1}\ldots\alpha_n$.

La conclusion à tirer de là est la règle de Laplace, qui consiste à prendre, par exemple, p lignes, à en tirer tous les déterminants possibles à p^2 éléments, et à multiplier ces déterminants partiels par les déterminants complémentaires, c'est-à-dire par ceux qu'on obtient en effaçant, dans le déterminant principal, les lignes et les colonnes qui ont déjà servi. Les signes doivent concorder dans le développement ordinaire du déterminant principal, et dans le développement par la règle de Laplace.

135. Dans les formules (1) et (2), chaque dérivée partielle $\frac{\partial P}{\partial a_{rs}}$ est, au signe près, le déterminant qu'on obtient en supprimant la ligne r et la colonne s dans le déterminant principal P. En général, on appelle *mineurs d'ordre m* les déterminants qu'on obtient en supprimant m lignes et m colonnes quelconques dans le déterminant principal. Soit

$$c=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1,2,\ldots,m} \tag{8}$$

le nombre des combinaisons de n objets m à m. Écrivons ces combinaisons les unes à la suite des autres dans un ordre choisi, et numérotons-les de sorte que les numéros $1, 2, \ldots, c$ caractérisent les diverses combinaisons. Soient γ et δ deux quelconques de ces numéros. Si dans le déterminant P on supprime tous les éléments qui ont leur premier indice dans la combinaison γ, et leur second indice dans la combinaison δ, les éléments restants formeront un mineur quelconque d'ordre m. Nous le représenterons par la notation $P_{\gamma\delta}^{(m)}$. Le nombre de ces mineurs est évidemment égal à c^2, et avec eux on peut former le déterminant

$$S_c^{(m)}=\begin{vmatrix} P_{11}^{(m)} & \ldots & P_{1c}^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{c1}^{(m)} & \ldots & P_{cc}^{(m)} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

On a pour les mineurs du premier ordre les plus simples combinaisons. Par exemple, la notation $P_{rs}^{(1)}$ indiquera qu'on a supprimé la ligne r et la colonne s. *Le déterminant* $S_n^{(1)}$ *est dit alors le déterminant adjoint du déterminant* P.

Si, dans le déterminant P, on supprime les lignes et les colonnes qui servent à former $P_{\gamma\delta}^{(m)}$, il restera un déterminant d'ordre $n-m$ qu'on peut représenter par le symbole

$$P_{-\gamma,-\delta}^{(n-m)},$$

et qu'on appelle *complémentaire* par rapport au mineur $P_{\gamma\delta}^{(m)}$. De même, le déterminant $S_c^{(n-m)}$ formé avec les $P_{-\gamma,-\delta}^{(n-m)}$ est dit *complémentaire du déterminant* $S_c^{(m)}$. En particulier, les mineurs complémentaires des $P_{rs}^{(1)}$ sont les éléments eux-mêmes du déterminant P.

Choisissons les seconds indices dans la combinaison δ formée de m lettres, alors la règle de Laplace aura pour traduction algébrique la formule

$$P = P_{1\delta}^{(m)} P_{-1,-\delta}^{(n-m)} + P_{2\delta}^{(m)} P_{-2,-\delta}^{(n-m)} + \ldots + P_{c\delta}^{(m)} P_{-c,-\delta}^{(n-m)}. \tag{10}$$

Si, dans cette formule, on remplace δ par δ', on introduira nécessairement des lettres qui appartiennent à la combinaison complémentaire $-\delta$. Alors le déterminant P pourra être remplacé par un autre déterminant où des colonnes seraient identiques. La formule (10) entraîne donc la formule

$$0 = P_{1\delta'}^{(m)} P_{-1,-\delta'}^{(n-m)} + \ldots + P_{c\delta'}^{(m)} P_{-c,-\delta'}^{(n-m)}. \tag{11}$$

136. Comme applications des formules (10) et (11), formons des produits de déterminants où les indices (m) et $(n-m)$ seront supprimés pour la commodité de l'écriture. Nous aurons, comme première application, la formule

$$\begin{vmatrix} P_{11} & \ldots & P_{1c} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{c1} & \ldots & P_{cc} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} P_{-1,-1} & P_{-1,-2} & \ldots & P_{-1,-s} & \ldots & P_{-1,-c} \\ P_{-2,-2} & P_{-2,-2} & \ldots & P_{-2,-s} & \ldots & P_{-c,-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & 0 & \ldots & P_{1s} & \ldots & P_{1c} \\ 0 & P & \ldots & P_{2s} & \ldots & P_{2c} \\ . & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & P_{ss} & \ldots & P_{sc} \\ . & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & P_{cs} & \ldots & P_{cc} \end{vmatrix}.$$

En particulier, pour $m = n-1$ et $s = n-2$, on a, en changeant les indices $n-1$ et n en 1 et 2,

$$\frac{\partial P}{\partial a_{11}} \frac{\partial P}{\partial a_{22}} - \frac{\partial P}{\partial a_{12}} \frac{\partial P}{\partial a_{21}} = P \frac{\partial^2 P}{\partial a_{11}\, \partial a_{22}},$$

et, d'une manière semblable mais générale,

$$\frac{\partial P}{\partial a_{rs}} \frac{\partial P}{\partial a_{r's'}} - \frac{\partial P}{\partial a_{rs'}} \frac{\partial P}{\partial a_{r's}} = P \frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}\, \partial a_{r's'}}. \tag{12}$$

137. Comme seconde application on a, de la même manière, la formule

$$S_c^{(m)} S_c^{(n-m)} = P^c, \tag{13}$$

d'où, en particulier,

$$S_n^{(1)} = P^{n-1}. \tag{14}$$

Cette dernière formule donne la valeur du déterminant adjoint en fonction de celle du déterminant proposé.

138. Arrivons à la formule de Cauchy,

$$R_{\gamma\delta}^{(m)} = P_{\gamma 1}^{(m)} Q_{\delta 1}^{(m)} + \ldots + P_{\gamma c}^{(m)} Q_{\delta c}^{(m)}. \tag{15}$$

Commençons par définir le produit R des deux déterminants P et Q du même ordre. On aura, par définition,

$$r_{\mu\nu} = p_{\mu 1} q_{\nu 1} + \ldots + p_{\mu n} q_{\nu n}, \tag{16}$$

en appelant p, q, r les termes des trois déterminants; on peut écrire simplement

$$r_{\mu\nu} = S^n(p_{\mu 1}, q_{\nu 1}), \tag{17}$$

le signe de sommation S étant relatif aux seconds indices 1. On aura, par suite,

$$R = \begin{vmatrix} S^n(p_{11} q_{11}) & S^n(p_{11} q_{21}) & \ldots & S^n(p_{11} q_{n1}) \\ S^n(p_{21} q_{11}) & S^n(p_{21} q_{21}) & \ldots & S^n(p_{21} q_{n1}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ S^n(p_{n1} q_{11}) & S^n(p_{n1} q_{21}) & \ldots & S^n(p_{n1} q_{n1}) \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Supposons que dans R on échange deux lignes, par exemple les deux premières. On aura l'échange entre les deux éléments

$$S^n(p_{11} q_{i1}) \quad \text{et} \quad S^n(p_{21} q_{i1}).$$

Rien n'est donc changé dans le déterminant Q. Au contraire, dans P, la suite

$$p_{11}, \quad p_{12}, \quad \ldots, \quad p_{1n}$$

est remplacée par

$$p_{21}, \quad p_{22}, \quad \ldots, \quad p_{2n},$$

et inversement. On a donc échangé au fond les deux premières lignes de P.

D'une manière générale, on peut dire que, si l'on échange les lignes d'indice i et j dans l'un des deux déterminants P et R, le même échange doit être fait dans l'autre déterminant pour que la loi

$$R = PQ$$

subsiste. Si, au lieu des lignes, on considère les colonnes, alors R et Q seront associés dans l'ordre de ces colonnes.

Cela posé, considérons un mineur quelconque $R_{\gamma\delta}^{(m)}$ de R. Amenons les lignes et les colonnes qui correspondent aux combinaisons γ et δ dans les premiers

rangs. La même opération devra être faite sur les lignes de P et les colonnes de Q et l'on aura toujours

$$R = PQ.$$

Il suffira donc de démontrer la formule de Cauchy dans le cas particulier représenté par la formule suivante :

$$(19) \qquad R_{11}^{(m)} = P_{11}^{(m)} Q_{11}^{(m)} + \ldots + P_{1c}^{(m)} Q_{1c}^{(m)}.$$

Considérons un terme quelconque de $R_{11}^{(m)}$. Il est dérivé du terme principal

$$r_{11} r_{22} \ldots r_{mm}$$

par des permutations effectuées sur les seconds indices. Il sera donc de la forme

$$\varepsilon r_{1\alpha_1} \ldots r_{m\alpha_m},$$

ou encore de la forme

$$\varepsilon S^n(p_{11}, q_{\alpha_1,1}) . S^n(p_{21}, q_{\alpha_2,1}) \ldots S^n(p_{m1}, q_{\alpha_m,1}).$$

Son développement renfermera donc toutes les combinaisons

$$(A) \qquad p_{1\beta_1} \ldots p_{m\beta_m} q_{\alpha_1\gamma_1} \ldots q_{\alpha_m\gamma_m},$$

où $\beta_1 \ldots \beta_m$, $\gamma_1 \ldots \gamma_m$ sont des combinaisons quelconques de m des indices 1, 2, ..., n.

Cela posé, $R_{11}^{(m)}$ est un déterminant, c'est-à-dire une fonction qui change de signe quand on change la parité de l'une des suites des indices de ses termes. Il faut donc que toutes les combinaisons A soient précédées d'un signe conforme à la loi de leurs indices. Mais alors, en raisonnant comme pour la règle de Laplace, on pourra démontrer la formule

$$R_{11}^{(m)} = \Sigma \pm S(p_{1,\beta_1} \ldots p_{m,\beta_m}) S(q_{\alpha_1,\gamma_1} \ldots q_{\alpha_m,\gamma_m}),$$

ou encore, en revenant aux notations adoptées,

$$R_{11}^{(m)} = P_{11}^{(m)} Q_{11}^{(m)} + \ldots + P_{1c}^{(m)} Q_{1c}^{(m)}.$$

139. Il nous reste à démontrer que le déterminant $S_c^{(m)}$ est une puissance de P. M. Francke l'a démontré d'abord par une méthode directe. Ensuite, M. Borchardt, dans une Note ajoutée au Mémoire de M. Francke, a obtenu d'une manière presque immédiate ce théorème important en s'appuyant sur la remarque suivante facile à démontrer : l'expression entière et rationnelle

$$(A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n)^k$$

n'a pour diviseurs entiers et rationnels que des expressions de la forme

$$\lambda(A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n)^\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, k);$$

or c'est le cas du déterminant P^k, où l'on peut appeler $x_1, \ldots, x_n$ les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne.

Cela posé, la relation

$$S_c^{(m)} S_c^{(n-m)} = P^c,$$

établie par Cauchy, montre que $S_c^{(m)}$ est un diviseur de P^c et, de plus, un diviseur entier et rationnel. Il faut donc que l'on ait

$$S_c^{(m)} = \lambda P^\mu.$$

On trouve facilement l'exposant μ et la constante $\lambda = 1$, en cherchant d'une part la dimension de $S_c^{(m)}$ par rapport à une lettre quelconque du déterminant P, et, d'autre part, en supposant P réduit à sa diagonale principale.

NOTE SUR LA RÈGLE DE LAGRANGE.

140. Soit la fraction rationnelle

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_n}{x-a} + \Psi(x),$$

où $\varphi(x)$ n'est plus divisible par $x-a$.

Posons $x = a+h$, nous aurons

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = A_1 + A_2 h + \ldots + A_n h^{n-1} + h^n \Psi(a+h).$$

D'un autre côté, nous aurons

$$\frac{f(a+h)}{(x-a-h)h^n\varphi(a+h)} = [A_1 + A_2 h + \ldots + A_n h^{n-1} + h^n\Psi(a+h)]$$
$$\times \frac{1}{h^n}\left[\frac{1}{x-a} + \frac{h}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(x-a)^n} + h^n\chi(a+h)\right].$$

Le coefficient de $\frac{1}{h}$, dans ce développement, est

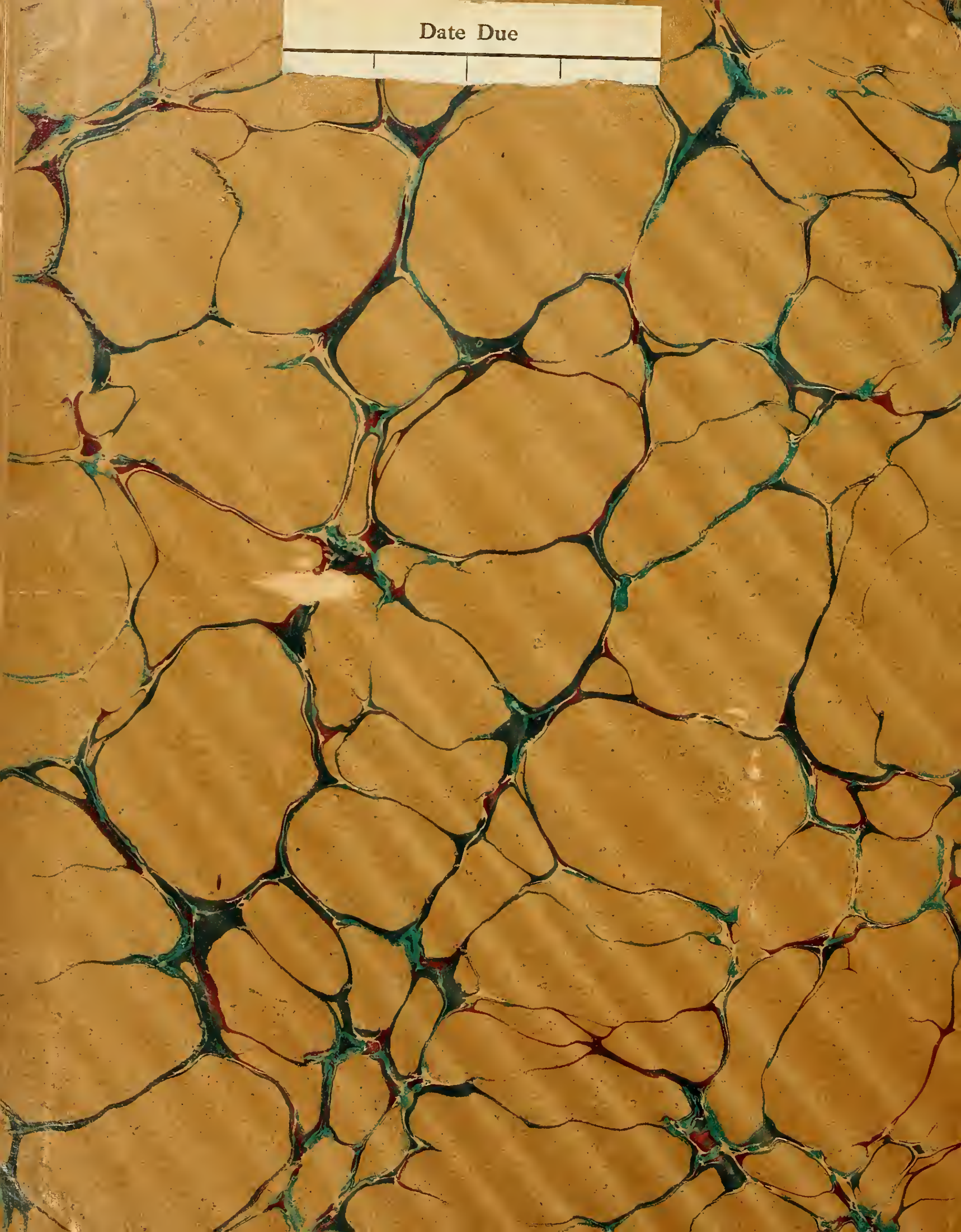
$$\frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_n}{x-a},$$

c'est-à-dire la partie du développement de $\frac{f(x)}{(x-a)^n\varphi(x)}$, qui correspond à la racine a.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE VII.

21971 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.


Date Due

